Časová a prostorová složitost algoritmů

Programovací techniky

doc. Ing. Jiří Rybička Dr.
ústav informatiky
PEF MENDELU v Brně
rybicka@mendelu.cz

Hodnocení algoritmů

Hodnocení algoritmů

- Kromě základních vlastností lze hodnotit kvalitu algoritmů

Hodnocení algoritmů

- Kromě základních vlastností lze hodnotit kvalitu algoritmů
- Stejnou úlohu lze řešit různými přístupy

Hodnocení algoritmů

- Kromě základních vlastností lze hodnotit kvalitu algoritmů
- Stejnou úlohu lze řešit různými přístupy
- Rozdíl je zejména ve spotřebě klíčových zdrojů – paměť, čas

Hodnocení algoritmů

- Kromě základních vlastností lze hodnotit kvalitu algoritmů
- Stejnou úlohu lze řešit různými přístupy
- Rozdíl je zejména ve spotřebě klíčových zdrojů – paměť, čas
- Pojem složitosti – **funkce** závislosti na N

Hodnocení algoritmů

- Kromě základních vlastností lze hodnotit kvalitu algoritmů
- Stejnou úlohu lze řešit různými přístupy
- Rozdíl je zejména ve spotřebě klíčových zdrojů – paměť, čas
- Pojem složitosti – **funkce** závislosti na N
- Znalost složitosti algoritmu je klíčová pro vhodnou aplikaci

Pojem složitosti

Pojem složitosti

- Pojem: matematická funkce představující závislost sledovaného parametru na množství vstupních dat

Pojem složitosti

- Pojem: matematická funkce představující závislost sledovaného parametru na množství vstupních dat
- Složitost prostorová – spotřeba paměti, diskového prostoru v závislosti na vstupních datech

Pojem složitosti

- Pojem: matematická funkce představující závislost sledovaného parametru na množství vstupních dat
- Složitost prostorová – spotřeba paměti, diskového prostoru v závislosti na vstupních datech
- Složitost časová – spotřeba času v závislosti na vstupních datech

Pojem složitosti

- Pojem: matematická funkce představující závislost sledovaného parametru na množství vstupních dat
- Složitost prostorová – spotřeba paměti, diskového prostoru v závislosti na vstupních datech
- Složitost časová – spotřeba času v závislosti na vstupních datech
- Časová složitost je obvykle kritičtější (prostor si lze koupit, čas nikoliv)

Pojem složitosti

- Pojem: matematická funkce představující závislost sledovaného parametru na množství vstupních dat
- Složitost prostorová – spotřeba paměti, diskového prostoru v závislosti na vstupních datech
- Složitost časová – spotřeba času v závislosti na vstupních datech
- Časová složitost je obvykle kritičtější (prostor si lze koupit, čas nikoliv)
- Třídy složitosti – není podstatná konkrétní přesná závislost, stačí charakterizovat třídu

Pojem složitosti

- Pojem: matematická funkce představující závislost sledovaného parametru na množství vstupních dat
- Složitost prostorová – spotřeba paměti, diskového prostoru v závislosti na vstupních datech
- Složitost časová – spotřeba času v závislosti na vstupních datech
- Časová složitost je obvykle kritičtější (prostor si lze koupit, čas nikoliv)
- Třídy složitosti – není podstatná konkrétní přesná závislost, stačí charakterizovat třídu
- Sledujeme horní ohraničení $O(N)$

Pojem složitosti

- Pojem: matematická funkce představující závislost sledovaného parametru na množství vstupních dat
- Složitost prostorová – spotřeba paměti, diskového prostoru v závislosti na vstupních datech
- Složitost časová – spotřeba času v závislosti na vstupních datech
- Časová složitost je obvykle kritičtější (prostor si lze koupit, čas nikoliv)
- Třídy složitosti – není podstatná konkrétní přesná závislost, stačí charakterizovat třídu
- Sledujeme horní ohraničení $O(N)$
- Zanedbáváme implementační konstanty

Pojem složitosti

- Pojem: matematická funkce představující závislost sledovaného parametru na množství vstupních dat
- Složitost prostorová – spotřeba paměti, diskového prostoru v závislosti na vstupních datech
- Složitost časová – spotřeba času v závislosti na vstupních datech
- Časová složitost je obvykle kritičtější (prostor si lze koupit, čas nikoliv)
- Třídy složitosti – není podstatná konkrétní přesná závislost, stačí charakterizovat třídu
- Sledujeme horní ohraničení $O(N)$
- Zanedbáváme implementační konstanty
- Vyjádření třídy – jednoduchá matematická funkce

Pojem složitosti

- Pojem: matematická funkce představující závislost sledovaného parametru na množství vstupních dat
- Složitost prostorová – spotřeba paměti, diskového prostoru v závislosti na vstupních datech
- Složitost časová – spotřeba času v závislosti na vstupních datech
- Časová složitost je obvykle kritičtější (prostor si lze koupit, čas nikoliv)
- Třídy složitosti – není podstatná konkrétní přesná závislost, stačí charakterizovat třídu
- Sledujeme horní ohraničení $O(N)$
- Zanedbáváme implementační konstanty
- Vyjádření třídy – jednoduchá matematická funkce
- Třídy lze uspořádat

Třídy složitosti

Třídy složitosti

- Ve vyjádření tříd je k implementační konstanta, jejíž vliv na charakter algoritmu je nulový

Třídy složitosti

- Ve vyjádření tříd je k implementační konstanta, jejíž vliv na charakter algoritmu je nulový
- Konstantní $O(N) = k$

Třídy složitosti

- Ve vyjádření tříd je k implementační konstanta, jejíž vliv na charakter algoritmu je nulový
- Konstantní $O(N) = k$
- Logaritmická $O(N) = k \log N$

Třídy složitosti

- Ve vyjádření tříd je k implementační konstanta, jejíž vliv na charakter algoritmu je nulový
- Konstantní $O(N) = k$
- Logaritmická $O(N) = k \log N$
- Lineární $O(N) = k \cdot N$

Třídy složitosti

- Ve vyjádření tříd je k implementační konstanta, jejíž vliv na charakter algoritmu je nulový
- Konstantní $O(N) = k$
- Logaritmická $O(N) = k \log N$
- Lineární $O(N) = k \cdot N$
- Lineárně logaritmická $O(N) = k \cdot N \cdot \log N$

Třídy složitosti

- Ve vyjádření tříd je k implementační konstanta, jejíž vliv na charakter algoritmu je nulový
- Konstantní $O(N) = k$
- Logaritmická $O(N) = k \log N$
- Lineární $O(N) = k \cdot N$
- Lineárně logaritmická $O(N) = k \cdot N \cdot \log N$
- Kvadratická $O(N) = k \cdot N^2$

Třídy složitosti

- Ve vyjádření tříd je k implementační konstanta, jejíž vliv na charakter algoritmu je nulový
- Konstantní $O(N) = k$
- Logaritmická $O(N) = k \log N$
- Lineární $O(N) = k \cdot N$
- Lineárně logaritmická $O(N) = k \cdot N \cdot \log N$
- Kvadratická $O(N) = k \cdot N^2$
- Kubická $O(N) = k \cdot N^3$

Třídy složitosti

- Ve vyjádření tříd je k implementační konstanta, jejíž vliv na charakter algoritmu je nulový
- Konstantní $O(N) = k$
- Logaritmická $O(N) = k \log N$
- Lineární $O(N) = k \cdot N$
- Lineárně logaritmická $O(N) = k \cdot N \cdot \log N$
- Kvadratická $O(N) = k \cdot N^2$
- Kubická $O(N) = k \cdot N^3$
- Exponenciální $O(N) = k \cdot Z^N$

Třídy složitosti

- Ve vyjádření tříd je k implementační konstanta, jejíž vliv na charakter algoritmu je nulový
- Konstantní $O(N) = k$
- Logaritmická $O(N) = k \log N$
- Lineární $O(N) = k \cdot N$
- Lineárně logaritmická $O(N) = k \cdot N \cdot \log N$
- Kvadratická $O(N) = k \cdot N^2$
- Kubická $O(N) = k \cdot N^3$
- Exponenciální $O(N) = k \cdot Z^N$
- Faktoriální $O(N) = k \cdot N!$

Složitost v praxi

Složitost v praxi

- Testovací množina dat je obvykle podstatně menší než reálná data

Složitost v praxi

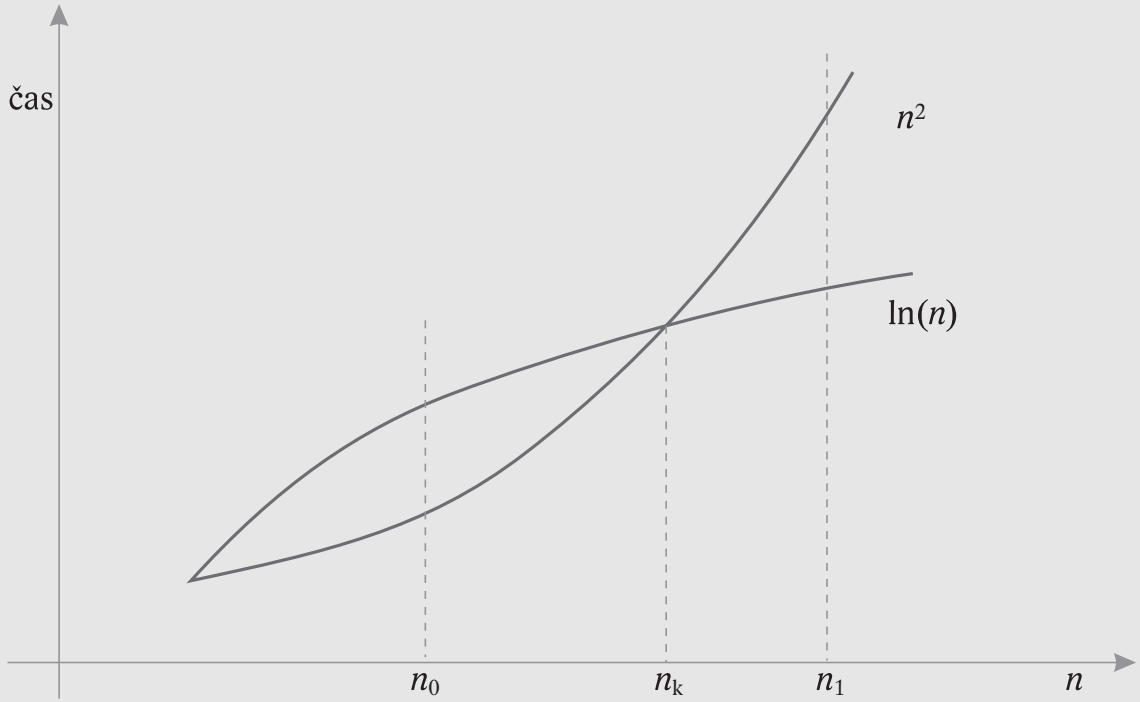
- Testovací množina dat je obvykle podstatně menší než reálná data
- Program funguje s malým množstvím dat výborně

Složitost v praxi

- Testovací množina dat je obvykle podstatně menší než reálná data
- Program funguje s malým množstvím dat výborně
- Při nasazení do provozu nastávají „nečekané“ komplikace

Složitost v praxi

- Testovací množina dat je obvykle podstatně menší než reálná data
- Program funguje s malým množstvím dat výborně
- Při nasazení do provozu nastávají „nečekané“ komplikace



Stanovení složitosti

Stanovení složitosti

- Metody – experimentální, analytické

Stanovení složitosti

- Metody – experimentální, analytické
- **Experiment** – vytvoření tabulky s údaji, kde počet hodnot nezávisle proměnné stanovujeme podle vznikajícího charakteru algoritmu

Stanovení složitosti

- Metody – experimentální, analytické
- **Experiment** – vytvoření tabulky s údaji, kde počet hodnot nezávisle proměnné stanovujeme podle vznikajícího charakteru algoritmu
- Možnosti praktických měření jsou omezené (stanovení přesné spotřeby času, stanovení přesné spotřeby prostoru)

Stanovení složitosti

Stanovení složitosti

- **Analýza algoritmu**

Stanovení složitosti

- **Analýza algoritmu**
- U prostoru – lokální statické proměnné, dynamické proměnné, rekurze

Stanovení složitosti

- **Analýza algoritmu**
- U prostoru – lokální statické proměnné, dynamické proměnné, rekurze
- Alokace paměti v cyklech, jejichž počet průchodů závisí na vstupních datech

Stanovení složitosti

- **Analýza algoritmu**
- U prostoru – lokální statické proměnné, dynamické proměnné, rekurze
- Alokace paměti v cyklech, jejichž počet průchodů závisí na vstupních datech
- Není potřeba sledovat globální statické proměnné

Stanovení složitosti

- **Analýza algoritmu**
- U prostoru – lokální statické proměnné, dynamické proměnné, rekurze
- Alokace paměti v cyklech, jejichž počet průchodů závisí na vstupních datech
- Není potřeba sledovat globální statické proměnné
- Časová složitost – cykly a rekurze závisející na vstupních datech

Stanovení složitosti

- **Analýza algoritmu**
- U prostoru – lokální statické proměnné, dynamické proměnné, rekurze
- Alokace paměti v cyklech, jejichž počet průchodů závisí na vstupních datech
- Není potřeba sledovat globální statické proměnné
- Časová složitost – cykly a rekurze závisející na vstupních datech
- Vnoření cyklů – násobení závislostí

Stanovení složitosti

- **Analýza algoritmu**
- U prostoru – lokální statické proměnné, dynamické proměnné, rekurze
- Alokace paměti v cyklech, jejichž počet průchodů závisí na vstupních datech
- Není potřeba sledovat globální statické proměnné
- Časová složitost – cykly a rekurze závisející na vstupních datech
- Vnoření cyklů – násobení závislostí
- Následné cykly – započítáváme jen horší složitost

Příklady

Příklady

- Hledání – sekvenční hledání v neuspořádané lineární struktuře (hledáme hodnotu C v poli P, v němž je naplněno N prvků)

Příklady

- Hledání – sekvenční hledání v neuspořádané lineární struktuře (hledáme hodnotu C v poli P, v němž je naplněno N prvků)
- Časová složitost odvozená z algoritmu:

```
I:=1;
while (I<=N) and (P[I]<>C)
      do Inc(I);
Nalezeno:=I<=N
```

Příklady

- Hledání – sekvenční hledání v neuspořádané lineární struktuře (hledáme hodnotu C v poli P, v němž je naplněno N prvků)
- Časová složitost odvozená z algoritmu:

```
I:=1;
while (I<=N) and (P[I]<>C)
      do Inc(I);
Nalezeno:=I<=N
```

- Cyklus při neúspěšném hledání (nejhorší případ) proběhne N-krát, složitost je tedy $O(N) = k \cdot N$ (lineární)

Příklady

- Hledání – sekvenční hledání v neuspořádané lineární struktuře (hledáme hodnotu C v poli P, v němž je naplněno N prvků)
- Časová složitost odvozená z algoritmu:

```
I:=1;
while (I<=N) and (P[I]<>C)
      do Inc(I);
Nalezeno:=I<=N
```

- Cyklus při neúspěšném hledání (nejhorší případ) proběhne N-krát, složitost je tedy $O(N) = k \cdot N$ (lineární)
- Uvažujme průměrně projití 75 % prvků pole, pak $O(N) = 0{,}75 \cdot k \cdot N = k_1 \cdot N$

Příklady

Příklady

- Modifikovaný algoritmus sekvenčního hledání v uspořádané struktuře:

```
I:=1;
while (I<=N) and (P[I]<C)
      do Inc(I);
Nalezeno:=I<=N
```

Příklady

- Modifikovaný algoritmus sekvenčního hledání v uspořádané struktuře:

```
I:=1;
while (I<=N) and (P[I]<C)
      do Inc(I);
Nalezeno:=I<=N
```

- Má zcela **stejnou složitost**, i když neúspěšné hledání je detekováno dříve

Příklady

- Modifikovaný algoritmus sekvenčního hledání v uspořádané struktuře:

```
I:=1;
while (I<=N) and (P[I]<C)
      do Inc(I);
Nalezeno:=I<=N
```

- Má zcela **stejnou složitost**, i když neúspěšné hledání je detekováno dříve
- Uvažujme průměrné projití 50 % prvků pole. Pak $O(N) = 0{,}5 \cdot k \cdot N = k_2 \cdot N$

Příklady

- Modifikovaný algoritmus sekvenčního hledání v uspořádané struktuře:

```
I:=1;
while (I<=N) and (P[I]<C)
      do Inc(I);
Nalezeno:=I<=N
```

- Má zcela **stejnou složitost**, i když neúspěšné hledání je detekováno dříve
- Uvažujme průměrné projití 50 % prvků pole. Pak $O(N) = 0{,}5 \cdot k \cdot N = k_2 \cdot N$
- Zřejmě platí $k_1 > k_2$, nemění se však **charakter** algoritmu, ani časová složitost (třída)

Příklady

- Modifikovaný algoritmus sekvenčního hledání v uspořádané struktuře:

```
I:=1;
while (I<=N) and (P[I]<C)
      do Inc(I);
Nalezeno:=I<=N
```

- Má zcela **stejnou složitost**, i když neúspěšné hledání je detekováno dříve
- Uvažujme průměrné projití 50 % prvků pole. Pak $O(N) = 0{,}5 \cdot k \cdot N = k_2 \cdot N$
- Zřejmě platí $k_1 > k_2$, nemění se však **charakter** algoritmu, ani časová složitost (třída)
- Jedná se o názornou ukázku velmi neefektivního použití algoritmu – v uspořádané struktuře je potřebné hledat v jiné třídě složitosti

Příklady

Příklady

- Binární vyhledávací strom (implementace dynamickou strukturou):

```
U:=Koren;
while (U<>nil) and (U^.Data<>C)
      do if C<U.Data then U:=U^.Vlevo
                     else U:=U^.Vpravo;
Nalezeno:=U<>nil
```

Příklady

- Binární vyhledávací strom (implementace dynamickou strukturou):

```
U:=Koren;
while (U<>nil) and (U^.Data<>C)
      do if C<U.Data then U:=U^.Vlevo
                     else U:=U^.Vpravo;
Nalezeno:=U<>nil
```

- Cyklus závisí na vstupních datech, v jeho těle proběhne rozhodnutí, do kterého podstromu se vydáme

Příklady

- Binární vyhledávací strom (implementace dynamickou strukturou):

```
U:=Koren;
while (U<>nil) and (U^.Data<>C)
      do if C<U.Data then U:=U^.Vlevo
                     else U:=U^.Vpravo;
Nalezeno:=U<>nil
```

- Cyklus závisí na vstupních datech, v jeho těle proběhne rozhodnutí, do kterého podstromu se vydáme
- Cyklus proběhne nejhůře tolikrát, kolik je hladin stromu

Příklady

- Binární vyhledávací strom (implementace dynamickou strukturou):

```
U:=Koren;
while (U<>nil) and (U^.Data<>C)
      do if C<U.Data then U:=U^.Vlevo
                     else U:=U^.Vpravo;
Nalezeno:=U<>nil
```

- Cyklus závisí na vstupních datech, v jeho těle proběhne rozhodnutí, do kterého podstromu se vydáme
- Cyklus proběhne nejhůře tolikrát, kolik je hladin stromu
- V případě vyváženého stromu je počet hladin stromu o N prvcích roven $h = \log_2 N$

Příklady

- Binární vyhledávací strom (implementace dynamickou strukturou):

```
U:=Koren;
while (U<>nil) and (U^.Data<>C)
      do if C<U.Data then U:=U^.Vlevo
                     else U:=U^.Vpravo;
Nalezeno:=U<>nil
```

- Cyklus závisí na vstupních datech, v jeho těle proběhne rozhodnutí, do kterého podstromu se vydáme
- Cyklus proběhne nejhůře tolikrát, kolik je hladin stromu
- V případě vyváženého stromu je počet hladin stromu o N prvcích roven $h = \log_2 N$
- Časová složitost je tedy $O(N) = k \cdot \log_2 N$

Příklady

Příklady

- Součet řady čísel ze standardního vstupu – prostorová složitost

Příklady

- Součet řady čísel ze standardního vstupu – prostorová složitost
- Iterativní algoritmus:

```
var C, Soucet: real;
begin Soucet:=0;
      while not SeekEof do begin
         read(C);
         Soucet:=Soucet+C
      end;
      writeln(Soucet)
end.
```

Příklady

- Součet řady čísel ze standardního vstupu – prostorová složitost
- Iterativní algoritmus:

```
var C, Soucet: real;
begin Soucet:=0;
      while not SeekEof do begin
         read(C);
         Soucet:=Soucet+C
      end;
      writeln(Soucet)
end.
```

- Cyklus neobsahuje alokaci paměti, prostorová složitost je tedy rovna $O(N) = k$ (konstantní)

Příklady

Příklady

- Součet řady řešený rekurzivním algoritmem:

```
function Soucet: real;
 var C: real;
 begin if not SeekEof then begin
          read(C);
          Soucet:=C+Soucet
       else Soucet:=0
 end;
begin writeln(Soucet)
end.
```

Příklady

Příklady

- Rekurze vyvolaná v hlavním programu je závislá na počtu vstupních dat

Příklady

- Rekurze vyvolaná v hlavním programu je závislá na počtu vstupních dat
- S každým zpracovaným číslem se volá funkce, na systémový zásobník se ukládá její návratová adresa a lokální proměnná C

Příklady

- Rekurze vyvolaná v hlavním programu je závislá na počtu vstupních dat
- S každým zpracovaným číslem se volá funkce, na systémový zásobník se ukládá její návratová adresa a lokální proměnná C
- Prostorová složitost je lineární $O(N) = k \cdot N$

Příklady

- Rekurze vyvolaná v hlavním programu je závislá na počtu vstupních dat
- S každým zpracovaným číslem se volá funkce, na systémový zásobník se ukládá její návratová adresa a lokální proměnná C
- Prostorová složitost je lineární $O(N) = k \cdot N$
- Jedná se o ukázku neefektivního algoritmu