Diferenciální rovnice prvního řádu

Obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu

Obyčejná diferenciální rovnice je rovnice, kde vystupuje neznámá funkce a její derivace. Setkáváme se s ní například všude tam, kde rychlost růstu nebo poklesu veličiny souvisí s její velikostí. Například rychlost s jakou se mění teplota horkého tělesa je funkcí teploty samotné. Rychlost tepelné výměny mezi dvěma tělesy je totiž úměrná rozdílu jejich teplot (Newtonův zákon).

Definice. Obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu rozřešenou vzhledem k derivaci *(stručněji též diferenciální rovnicí, DR) s neznámou y rozumíme rovnici tvaru*

$$y' = \varphi(x, y) \tag{ODE}$$

kde φ je funkce dvou proměnných.

(anglicky ordinary differential equation, ODE)

Další formy zápisu:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x, y)$$

$$\mathrm{d}y = \varphi(x, y)\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}y - \varphi(x, y)\mathrm{d}x = 0$$

Příklad: Najděte všechny funkce splňující $y' = 2xy$.

Cauchyova úloha, počáteční podmínka

Diferenciální rovnice udává scénář vývoje systému. K jednoznačnému předpovězení budoucího stavu je ovšem nutno znát nejenom, jaký mechanismus ovlivňuje vývoj systému, ale také stav současný.

Definice. *Nechť x_0, y_0 jsou reálná čísla. Úloha najít řešení rovnice*

$$y' = \varphi(x, y), \tag{ODE}$$

které splňuje zadanou počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0 \tag{IC}$$

se nazývá počáteční *(též* Cauchyova*)* úloha.

Řešení Cauchyovy úlohy nazýváme též partikulárním řešením rovnice. *Graf libovolného partikulárního řešení se nazývá* integrální křivka.

(anglicky initial condition, IC, initial value problem, IVP)

Příklad: Najděte všechny funkce splňující $y' = 2xy$ a $y(0) = 3$.

Příklad - tepelná výměna

- Rychlost tepelné výměny mezi dvěma tělesy je úměrná rozdílu jejich teplot (Newtonův zákon). Tento proces je tedy možno modelovat diferenciální rovnicí
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_0).$$
- Rovnice udává, že teplota T horkého tělesa se mění (rychlost změny je derivace) tak, že klesá (znaménko minus) rychlostí úměrnou (konstanta k) teplotnímu rozdílu mezi teplotou tělesa a teplotou okolí T_0 (člen $T - T_0$).
- K rovnici v ideálním případě dodáváme materiálovou charakteristiku (konstantu úměrnosti k) a počáteční teplotu. Řešením rovnice je funkce udávající závislost teploty na čase. Není tedy nutné provádět pokus a čekat na uplynutí požadované doby.
- Někdy může být vhodné nesledovat teplotu T, ale rozdíl oproti okolní teplotě, $\tau = T - T_0$. Rovnice se potom zjednoduší na
$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = -k\tau,$$
tedy na rovnici, kdy rychlost změny je úměrná funkční hodnotě.

Příklad - datování pomocí uhlíku

- Při datování archeologických nálezů pozůstatků živých organismů se využívá toho, že radioaktivní prvky se rozpadají rychlostí, která je úměrná množství dosud nerozpadnutého materiálu.
- Rychlost, s jakou se mění množství (a tedy i koncentrace y v daném vzorku) nerozpadnutého radioaktivního materiálu je popsána rovnicí
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\lambda y,$$
kde λ je konstanta úměrnosti. Tato rovnice je přirozeným důsledkem toho, že pro daný nestabilní izotop mají všechny atomy stejnou pravděpodobnost, že u nich dojde k rozpadu a tato pravděpodobnost se s časem nemění.
- Vhodný radioaktivní prvek vybereme podle toho, jak starý vzorek chceme datovat. Nejčastěji měříme množství radioaktivního uhlíku ^{14}C vztažené k množství stabilního ^{12}C. Počáteční podmínka je známa (předpokládáme stejný poměr zastoupení jako relativně nedávno, před průmyslovou revolucí) a díky tomu můžeme najít funkci udávající, jak s časem klesá zastoupení radioaktivního uhlíku. Obsah radioaktivního i stabilního uhlíku je možné změřit a tím získáme odhad, kolik procent radioaktivního uhlíku se rozpadlo. Řešení počáteční úlohy poté použijeme pro odhad doby, kdy organismus přestal spotřebovávat uhlík z atmosféry, tj. odhad stáří vzorku.

- Při pokusu o datování kostí dinosaurů klesne množství radioaktivního uhlíku pod měřitelnou úroveň. Proto se v tomto případě používají látky s delším poločasem rozpadu.

Příklad - akutní normovolemická hemodiluce

- Při chirugické operaci dochází ke krvácení. Pacient ztrácí krev s ní i krvinky. Při konstantní intenzitě krvácení to znamená, že pacient ztrácí krvinky rychlostí úměrnou počtu krvinek. Formálně se jedná o stejnou rovnici jako u radioaktivního rozpadu, jenom změníme interpretaci veličin.
- Pokud očekáváme takový průběh operace, že i po uvedeném poklesu bude pořád množství krvinek nad minimální přípustnou hodnotou, je možné před operací toto množství snížit tím, že se část krve odebere a krev se poté doplní vhodnými roztoky.
- Protože pacient má už od začátku operace menší počet krvinek, ztrácí tyto krvinky pomaleji a celkový úbytek během operace je menší. Na konci operace se pacientovi vrátí dříve odebraná krev. Výsledkem je, že po operaci v jeho těle koluje více krvinek, než pokud by byl operován s "původní krví".
- Metoda akutní normovolemické hemodiluce nachází v současné praxi široké využití v řadě operačních oborů. Poskytuje totiž možnost vyhnout se podání alogenní krevní transfuze a tím eliminovat rizika z ní vyplývající. Současně je tato metoda výrazně finančně levnější a její přínos je tak i ekonomický. (podle https://zdravi.euro.cz/)

Příklad - rovnice samočištění jezer

- Nechť veličina y udává množství látky, která znečišťuje vodu v jezeře o objemu V.
- Předpokládejme, že do jezera přitéká čistá voda a stejnou rychlostí odtéká voda s nečistotami (hladina se nemění, je v ustáleném stavu). Nechť veličina r udává, jaký objem vody se v jezeře takto vymění za jeden den. Předpokládejme dále (poněkud nerealisticky), že rozdělení znečišťujících částic v jezeře je rovnoměrné.
- Úbytek hmotnosti nečistot za časovou jednotku je dán derivací $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.
- Tento úbytek hmotnosti je možno vyjádřit též ve tvaru $\frac{r}{V}y$, kde $\frac{r}{V}$ je pro dané jezero kladná konstanta udávající, jak velká část z celkového množství vody se v jezeře vymění za časovou jednotku. Označíme-li tuto konstantu symbolem k, je proces úbytku nečistot v jezeře popsán diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky.$$

- Výše uvedená rovnice na nazývá *rovnice samočištění jezer*, ale tento název je čistě formální. Jedná se vlastně o stejnou rovnici, která popisuje radioaktivní rozpad, ztrátu krvinek při operaci nebo změnu rozdílu mezi teplotou horkého nápoje a místnosti při chladnutí nápoje.
- Stejnou rovnicí je možné popsat nejenom odbourávání nečistot z životního prostředí, ale i odbourávání léků nebo drog z těla. Považujme krevní oběh za jezero a lék nebo drogu za znečišťující látku. V případě, že rychlost odbourávání je úměrná koncentraci (platí pro farmakokinetiku prvního řádu, toto splňuje většina léčiv za běžných koncentrací), řídí se proces odbourávání stejnou diferenciální rovnicí.

Příklad - vývoj populace a její ekologický lov

- Zkoumejme velikost y určité populace, v prostředí s nosnou kapacitou K.
- Realistickým předpokladem v prostředí s omezenými úživnými vlastnostmi je, že specifická míru růstu populace (rychlost s jakou se velikost populace zvětšuje vztažená na jednotkové množství populace) klesá s tím, jak se velikost populace přibližuje k nosné kapacitě a je modelována funkcí $r\left(1-\frac{y}{K}\right)$. Podle velkosti koeficientů v této rovnici dělíme živočichy na r-stratégy a K-stratégy, toto dělení odráží, jak se snaží druh přežít.
- Za uvedených předpokladů je možno vývoj populace popsat rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ry\left(1-\frac{y}{K}\right).$$

- Pokud lovem snížíme přírůstky populace, můžeme tento proces modelovat rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ry\left(1-\frac{y}{K}\right) - h(y),$$

  kde $h(y)$ je intenzita lovu populace o velikosti y. Modelování tohoto procesu umožní nalezení ekonomicky výhodné ale trvale udržitelné strategie lovu.

Geometrická interpretace ODE

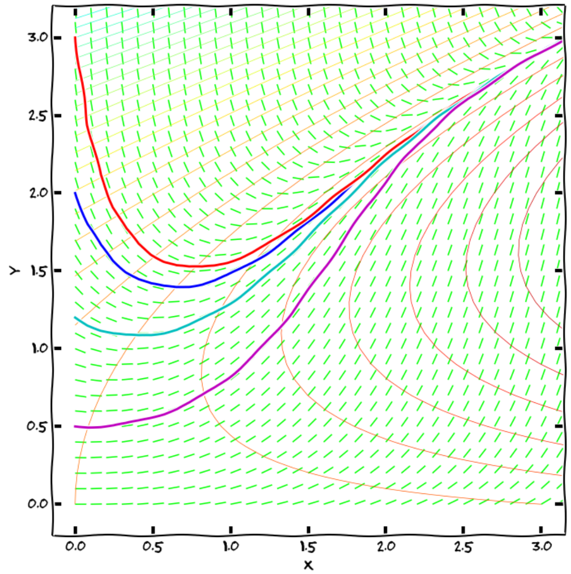
Protože derivace funkce v bodě udává směrnici tečny ke grafu funkce v tomto bodě, lze rovnici

$$y' = \varphi(x,y) \tag{ODE}$$

chápat jako předpis, který každému bodu v rovině přiřadí směrnici tečny k integrální křivce, která tímto bodem prochází. Sestrojíme-li v dostatečném počtu (například i náhodně zvolených) bodů $[x,y]$ v rovině vektory $(1,\varphi(x,y))$, obdržíme **směrové pole diferenciální rovnice** — systém lineárních elementů, které jsou tečné k integrálním křivkám.

Počáteční podmínka $y(x_0)=y_0$ geometricky vyjadřuje skutečnost, že graf příslušného řešení prochází v rovině bodem $[x_0,y_0]$. Má-li tato počáteční úloha jediné řešení, neprochází bodem $[x_0,y_0]$ žádná další křivka. Má-li každá počáteční úloha jediné řešení (což bude pro nás velice častý případ), znamená to, že integrální křivky se *nikde neprotínají*.

Vrstevnice funkce $\varphi(x,y)$ mají tu vlastnost, že derivace integrálních křivek podél každé z vrstevnic je konstantní. Proto tyto křivky nazýváme **isokliny**.



Obrázek 1: Směrové pole diferenciálni rovnice, integrální křivky, isokliny

Obecné a partikulární řešení

Řešení diferenciální rovnice je nekonečně mnoho. Zpravidla je dokážeme zapsat pomocí jediného vzorce, který obsahuje nějakou (alespoň do jisté míry libovolnou) konstantu C. Takový vzorec se nazývá **obecné řešení rovnice**. Pokud není zadána počáteční podmínka a mluvíme o **partikulárním řešení**, máme tím na mysli jednu libovolnou funkci splňující diferenciální rovnici.

Příklad: Obecným řešením diferenciální rovnice

$$y' = 2xy$$

je

$$y = Ce^{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Žádná jiná řešení neexistují, všechna řešení se dají zapsat v tomto tvaru pro nějakou vhodnou konstantu C. Partikulárním řešením je například $y = 5e^{x^2}$. Řešením počáteční úlohy

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 3$$

je

$$y = 3e^{x^2}.$$

Numerické řešení IVP

Řešení počáteční úlohy lze numericky aproximovat poměrně snadno: začneme v bodě zadaném počáteční podmínkou a v okolí tohoto bodu nahradíme integrální křivku její tečnou. Tím se dostaneme do dalšího bodu, odkud opět integrální křivku aproximujeme tečnou. Směrnici tečny zjistíme z diferenciální rovnice, buď přímo z derivace (Eulerova metoda).

Další možnost je použít k aproximaci sečnu tak, že opravíme směrnici tečny podle chování směrového pole. Bereme v úvahu i konvexnost či konkávnost a fakt, že se derivace mění s měnícím se x i y (metoda Runge–Kutta). Stačí tedy mít zvolen *krok* numerické metody (délku intervalu, na kterém aproximaci tečnou použijeme) a výstupem metody bude aproximace integrální křivky pomocí lomené čáry.

Iterační schema Eulerovy metody

Počáteční úloha:

$$y' = \varphi(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Tečna k řešení v bodě $[x_0, y_0]$:

$$y = y_0 + \varphi(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Funkční hodnota v bodě $x_0 + h$, kde h je krok Eulerovy metody:

$$y(x_0 + h) = y_0 + \varphi(x_0, y_0)h.$$

Iterační formule Eulerovy metody:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h, \\ y_{n+1} &= y_n + \varphi(x_n, y_n)h. \end{aligned}$$

Vylepšení

- zjemnit krok h (buď všude, nebo jenom tam, kde "je to potřeba"),
- použít místo $\varphi(x_n, y_n)$ lepší směrnici (Metoda Runge Kutta druhého nebo čtvrtého řádu, …).

ODE se separovanými proměnnými

Definice. *Diferenciální rovnice tvaru*

$$y' = f(x)g(y) \tag{S}$$

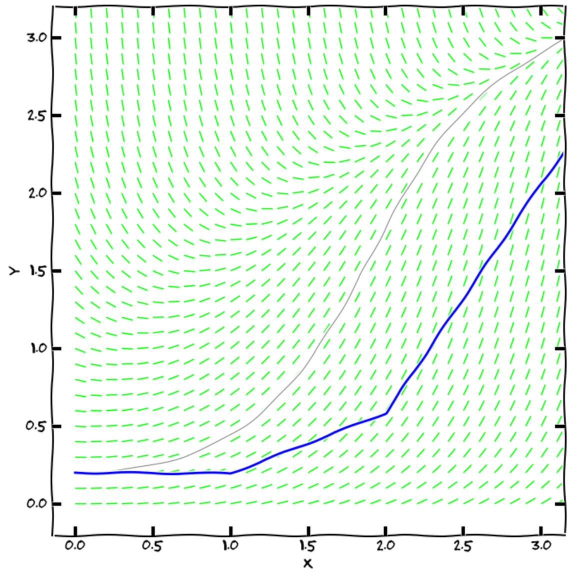
kde f a g jsou funkce spojité na (nějakých) otevřených intervalech se nazývá obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.

Příklad: Rovnice

$$y' + xy + xy^2 = 0$$

je rovnicí se separovanými proměnnými, protože je možno ji zapsat ve tvaru

$$y' = -xy(y + 1).$$



Obrázek 2: Eulerova metoda s velmi dlouhým krokem (modrou barvou) zaostává za přesným řešením (šedou barvou). Pro lepší výsledek můžeme zmenšit krok nebo vylepšit metodu.

Rovnice

$$y' = x^2 - y^2$$

není rovnice se separovatelnými proměnnými.

Test separovatelnosti proměnných: Diferenciální rovnice

$$y' = \varphi(x, y)$$

je rovnicí se separovanými proměnnými právě tehdy, když existují funkce $f(x)$ a $g(y)$ takové, že

$$\varphi(x, y) = f(x)g(y).$$

Pokud je φ nezáporná a dostatečně hladká na nějaké otevřené konvexní množině, je rovnice rovnicí se separovanými proměnnými právě tehdy, když platí

$$\begin{vmatrix} \varphi & \frac{\partial}{\partial x}\varphi \\ \frac{\partial}{\partial y}\varphi & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\varphi \end{vmatrix} = 0.$$

Řešení ODE se separovanými proměnnými

1. Má-li algebraická rovnice $g(y) = 0$ řešení $k_1, k_2, \ldots, k_n$, jsou konstantní funkce $y \equiv k_1$, $y \equiv k_2$, $\ldots$, $y \equiv k_n$ řešeními rovnice.
2. Pracujme na intervalech, kde $g(y) \neq 0$. Formálně nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y).$$
3. Odseparujeme proměnné
$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x.$$
4. Získanou rovnost integrujeme
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C.$$
5. Pokud je zadána počáteční podmínka, je možné ji na tomto místě dosadit do obecného řešení a určit hodnotu konstanty C. Tuto hodnotu poté dosadíme zpět do obecného řešení a obdržíme řešení *partikulární*.
6. Pokud je to možné, převedeme řešení (obecné nebo partikulární) do explicitního tvaru (vyjádříme odsud y).

Existence a jednoznačnost řešení

Věta o existenci a jednoznačnosti řešení: *Je-li $g(y_0) \neq 0$, je řešení počáteční úlohy*

$$y' = f(x)g(y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

které obdržíme pomocí postupu z předchozích odstavců, definované a jednoznačně určené v nějakém okolí bodu x_0.

Vzorec pro řešení IVP pro rovnici se separovatelnými proměnnými: Partikulární řešení počáteční úlohy

$$y' = f(x)g(y), \qquad y(x_0) = y_0$$

lze psát též přímo ve tvaru určitého integrálu

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Diferenciální rovnice růstu vodní kapky

Modelujme růst kulové kapky. Ta roste tak, že na povrchu kondenzují vodní páry. Kapka proto roste tak, že její objem se zvětšuje rychlostí úměrnou povrchu. Povrch je zase úměrný druhé mocnině poloměru a poloměr je úměrný třetí odmocnině objemu. Platí tedy (po sloučení všech konstant úměrnosti do jedné)

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = kV^{2/3}.$$

Obrázek 3: Londýnská mlha. Dnes už to není jako za časů Sherloka Holmese. Poslední velká mlha (Pea soup fog) byla v roce 1952. Zdroj: Wikipedia.

Tato rovnice má konstantní řešení $V = 0$. Nekonstantní řešení dostaneme po úpravě

$$V^{-2/3}\mathrm{d}V = k\mathrm{d}t$$

a po integraci

$$\int V^{-2/3}\mathrm{d}V = k\int \mathrm{d}t,$$

což dává

$$3V^{1/3} = kt + C$$

a

$$V = \left(\frac{1}{3}kt + \frac{1}{3}C\right)^3,$$

tj.

$$V = (k_0t + c)^3,$$

kde $k_0 = \frac{1}{3}k$ a $c = \frac{1}{3}C$ jsou konstanta spojená rychlostí kondenzace a integrační konstanta.

Všimněte si, že počáteční úloha s počáteční podmínkou $V(0) = 0$ má konstantní nulové řešení

$$V(t) = 0$$

a nenulové řešení

$$V(t) = (k_0t)^3.$$

Máme zde tedy nejednoznačnost v řešení počáteční úlohy. Tato nejednoznačnost není v rozporu s větou o existenci a jednoznačnosti řešení, protože pravá strana nemá ohraničnou derivaci podle V. A nejednoznačnost má v tomto případě dokonce fyzikální význam. Plynné skupenství může existovat i pod bodem kondenzace. Takovému jevu se říká přechlazená pára. Aby došlo ke kondenzaci, musí být k dispozici kondenzační jádra, například nečistoty ve vzduchu. Proto ve znečištěném ovzduší dochází častěji ke kondenzaci a tvorbě mlhy. Své by o tom mohli vyprávět obyvatelé Londýna, kteří se proslulých mlh zbavili poté, co se omezilo topení uhlím. My dnes spíše známe přechlazenou tekutinu ve formě hřejících polštářků, kde se po lupnutí plíškem spustí přeměna skupenství na pevné spojená s intenzivním uvolněním tepla.