

1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---

Jméno:

1. [11 bodů] Diferenciální počet funkcí dvou proměnných, gradient, vektorová funkce.

- Napište definici parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x .
- Funkce $f(x, y)$ má v bodě $(2, 1)$ gradient $\nabla f(2, 1) = (3, -1)$ a funkční hodnotu $f(2, 1) = 0$. Najděte její
 - parciální derivace v bodě $(2, 1)$,
 - lineární aproximaci v bodě $(2, 1)$,
 - určete, zda má v bodě $(2, 1)$ lokální extrém.

Pokud některou z částí není možno splnit, napište, jakou minimální dodatečnou informaci o funkci f potřebujeme.

- Pro jakou hodnotu parametru a je vektorové pole

$$(6xy^2 + 3, ax^2y)$$

gradientem nějaké kmenové funkce, tj. existuje u takové, že $\nabla u = (6xy^2 + 3, ax^2y)$?

2. [7 bodů]

- Tabulka (<http://math.ucsd.edu/~ashenk>) udává efekt cvičení na tlak u žen. Udává tlak $P(E, t)$ v torrech (milimetr rtuťového sloupce) v závislosti na věku t v letech a intenzitě cvičení E ve wattech. Odhadněte pomocí centrální diference hodnotu parciální derivace $\frac{\partial P}{\partial E}$ v bodě $E = 100, t = 35$. Napište i jednotku této parciální derivace a slovní interpretaci. Logicky zdůvodněte, proč má derivace takové znaménko, jaké Vám vyšlo.

věk [roky]	intenzita cvičení [W]			
	$E = 150$	$E = 100$	$E = 50$	$E = 0$
t				
25	178	163	145	122
35	180	165	149	125
45	197	181	167	132
55	209	199	177	140
65	195	200	181	158

- Při modelování šíření nemoci byl použit vzorec

$$R(d, v) = 5(1 - v) \frac{d}{1 + d},$$

kde R je počet lidí, které nemocný jedinec nakazí, v je zlomek kolik populace je proočkováno a d je průměrný počet dní, jak dlouho se pohybuje nemocný jedinec v populaci. Vypočtete parciální derivaci funkce R podle d pro hodnoty $d = 4$ a $v = 0$ a napište slovní interpretaci této derivace.

3. [4 body] Vypočtete dvojný integrál

$$\iint_M xy \, dx dy.$$

Množina M je zadána nerovnostmi $0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1$.

4. [4 body] Najděte lineární diferenciální rovnici prvního řádu, takovou, že její obecné řešení je

$$y = x^3 + Cx.$$

5. [8 bodů]

- Nechť $f(x, t)$ je funkce dvou proměnných. Je operátor

$$L[f] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t}$$

lineární? Zdůvodněte nebo dokažte.

- Formaldehyd se z dřevěného výrobku bez atestace v malé nevětrané místnosti uvolňuje jenom do dosažení určité rovnovážné koncentrace. Rychlost, s jakou přibývá množství formaldehydu ve vzduchu v místnosti, je úměrná množství, které chybí do dosažení rovnovážného stavu. Zapište tento proces pomocí vhodné diferenciální rovnice a rozhodněte, zda je tato rovnice lineární a zda má separovatelné proměnné.

6. [5 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + 2y' + y = x$$

7. [5 bodů] Podle Wikipedie je Bruselátor (jistý model zajímavé chemické reakce) popsán autonomním systémem

$$\begin{aligned} x' &= 1 + x^2y - 4x \\ y' &= -x^2y + 3x \end{aligned}$$

a má stacionární bod $S_1 = [1, 3]$. Určete typ stacionárního bodu S_1 . Načrtněte tvar trajektorií typický pro okolí stacionárního bodu tohoto typu.

8. [6 bodů] Najděte dvě různé minimální konstry v grafu na druhé straně.