Písemná zkouška a zápočet z Inženýrské matematiky, 28.1.2020 (60 minut)

Body

1	2	3	4	5	6	7	8

Jméno: ....

1. [11 bodů] Diferenciální počet funkcí dvou proměnných, gradient, vektorová funkce.

a) Napište definici parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x.

b) Napište vzorec pro výpočet gradientu skalární funkce $f(x, y)$ a využití gradientu.

c) Napište vzorec pro výpočet a využití divergence vektorové funkce (P, Q), kde P a Q jsou funkce proměnných x a y.

d) Teplo prostupuje stěnou (jednorozměrná úloha) a ve stěně se mění teplota s polohou x a s časem t. Zapište pomocí derivací následující veličiny a určete i jejich jednotku.

i) Rychlost, s jakou v daném bodě a čase roste teplota s časem.

ii) Rychlost, s jakou v daném bodě a čase roste teplota ve směru osy x.

iii) Rychlost, s jakou v daném bodě a čase klesá teplota ve směru osy x.

e) Tabulka (`http://math.ucsd.edu/~ashenk`) udává efekt cvičení na tlak u žen. Udává tlak $P(E, t)$ v torrech (milimetr rtuťového sloupce) v závislosti na věku t v letech a intenzitě cvičení E ve wattech. Odhadněte pomocí centrální diference hodnotu parciální derivace $\dfrac{\partial P}{\partial t}$ v bodě $E = 100$, $t = 35$. Napište i jednotku této parciální derivace a slovní interpretaci. Logicky zdůvodněte, proč má derivace takové znaménko, jaké Vám vyšlo.

věk [roky]	**intenzita cvičení** [W]			
t	$E = 150$	$E = 100$	$E = 50$	$E = 0$
25	178	163	145	122
35	180	165	149	125
45	197	181	167	132
55	209	199	177	140
65	195	200	181	158

2. [4 body] Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Množina M je zadána nerovnostmi $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \sqrt{3x}$.

3. [4 body] Vyřešte rovnici

$$y' + \frac{3}{x}y = x^3$$

4. [8 bodů]

a) Uvažujme operátor

$$L[y] = y' + a(x)y.$$

z lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Dokažte, že tento operátor má opravdu vlastnosti lineárního operátoru.

b) Nechť $f(x, t)$ je funkce dvou proměnných. Je operátor

$$L[f] = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

lineární? Zdůvodněte nebo dokažte.

5. [7 bodů]

a) Teplota v místnosti kde se přestalo topit se mění tepelnou výměnou s okolím. Rychlost, s jakou teplota místnosti v zimě klesá, je úměrná rozdílu teplot v místnosti a venku. Vyjádřete toto pozorování kvantitativně pomocí derivací. Sestavíte tím matematický model popisující pokles teploty v této místnosti.

b) Modifikujte předchozí model pro místnost, ve které jsou lidé produkující teplo. Předpokládejme, že vliv lidí na tepotu v místnosti je konstantní, nezávisí na čase ani na teplotě.

c) Modifikujte předchozí model předpokladem, že vliv lidí na ohřev místnosti je úměrný rozdílu teploty místnosti a teploty lidského těla.

d) Které z výše uvedených rovnic jsou lineární a které se separovatelými proměnnými?

6. [5 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y = x$$

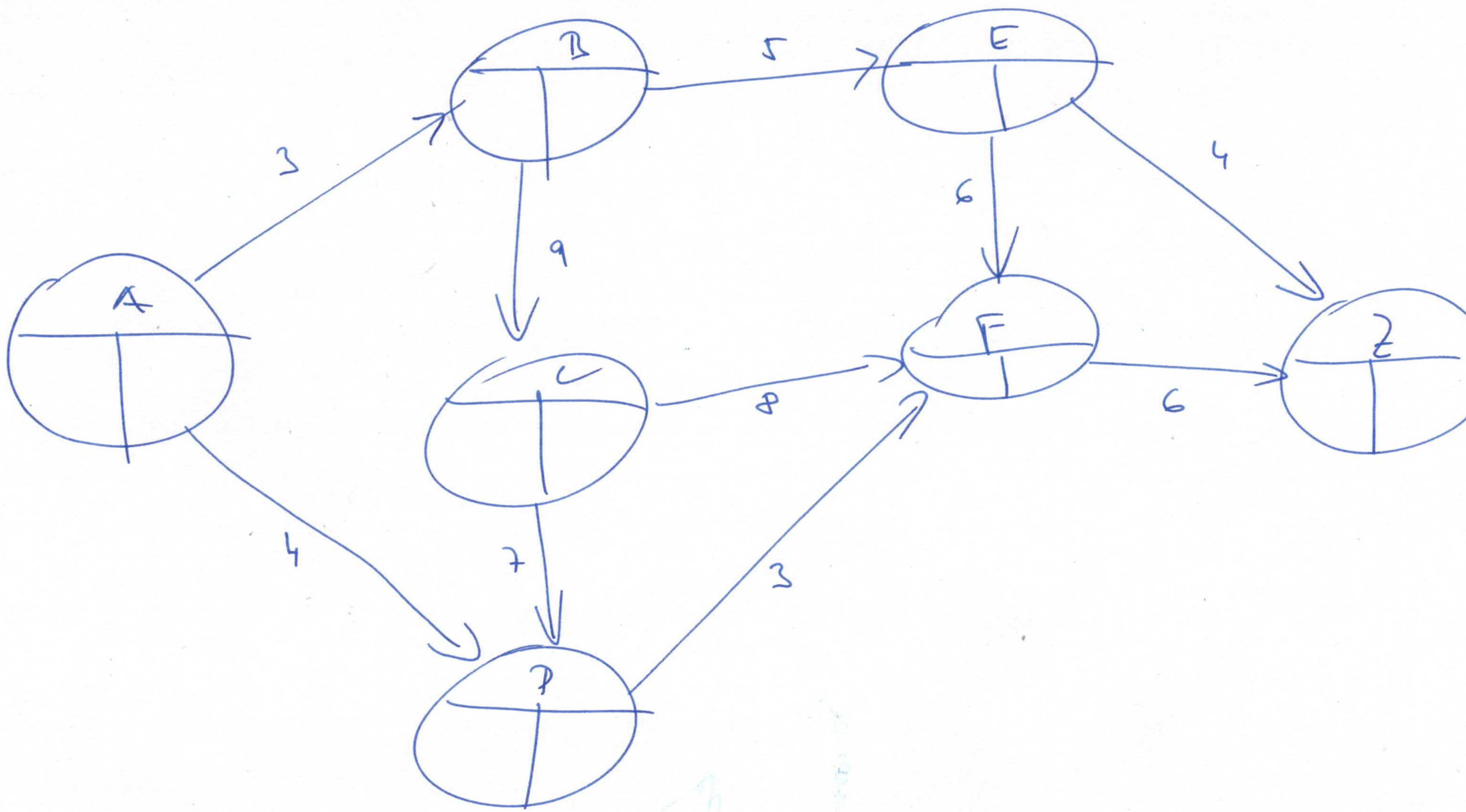
7. [5 bodů] Podle Wikipedie je Bruselátor (jistý model zajímavé chemické reakce) popsán autonomním systémem

$$x' = 1 + x^2 y - 4x$$
$$y' = -x^2 y + 3x$$

a má stacionární bod $S_1 = [1, 3]$. Určete typ stacionárního bodu S_1. Načrtněte tvar trajektorií typický pro okolí stacionárního bodu tohoto typu.

8. [6 bodů] Najděte kritickou cestu v grafu na druhé straně.

- Požadavek: Alespoň 16 bodů z 50 možných.


A
B
C
D
E
F
Z
3
4
5
9
7
8
3
6
4
6

1) a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$

b) $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$, kolmý na vrstevnice

c) $\operatorname{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$, udává jak v daném místě roste tok vektorového pole

d) i) $\frac{\partial T}{\partial t}$ v °C/hod

ii) $\frac{\partial T}{\partial x}$ v °C/cm

iii) $-\frac{\partial T}{\partial x}$ v °C/cm

e) $$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P(100, 45) - P(100, 25)}{45 - 25} = \frac{181 - 163}{20} =$$

$$= \frac{18}{20} = 0{,}9 \text{ torr/rok}$$

Při stejné ~~[illegible]~~ intenzitě cvičení 100 W cvičenců, kteří mají 35 let, každý rok navíc přidává na tlaku hodnotu 0,9 torrů.

Starší člověk → vyšší tlak při námaze tj. $\frac{\partial P}{\partial t} > 0$

---

2) $$\iint_M y \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{3x}} y \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{3x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot 3x \, dx = \left[\frac{3}{4} x^2 \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

---

3) $$e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \cdot \ln|x|} = e^{\ln x^3} = x^3$$

$$x^3 y' + 3x^2 y = x^6$$

$$(x^3 y)' = x^6 \Rightarrow x^3 y = \frac{x^7}{7} + C \Rightarrow y = \frac{x^4}{7} + \frac{C}{x^3}$$

4

a) $L[y_1+y_2] = (y_1+y_2)' + a(x)(y_1+y_2) =$

$= y_1' + y_2' + a(x)y_1 + a(x)y_2 =$

$= y_1' + a(x)y_1 + y_2' + a(x)y_2 = L[y_1] + L[y_2]$

$L[c \cdot y_1] = (c \cdot y_1)' + a(x) \cdot c \cdot y_1 = c \cdot y_1' + a(x) \cdot c \cdot y_1 =$

$= c \cdot (y_1' + a(x)y_1) = c \cdot L[y_1]$

b) ano, $\frac{\partial f}{\partial t}$ je lineární, $\frac{\partial f}{\partial x}$ také, složení lin. op. je lineární a proto $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ je lineární, rozdíl lin. op. je lineární a proto je $\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ lineární.

---

5) a) $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_\infty)$ T_∞.. teplota okolí

b) $\frac{dT}{dt} = -k_1(T - T_\infty) + k_2$

c) $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_\infty) + k_2(T - T_{tělo})$

d) všechny jsou lineární, všechny mají separovatelné proměnné

---

6) α) $y'' - 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

β) $y = ax + b$, $y' = a$, $y'' = 0$

$0 - 2y = 0 - 2(ax+b) = 1 \cdot x + 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$

$y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} - \frac{1}{2}x$

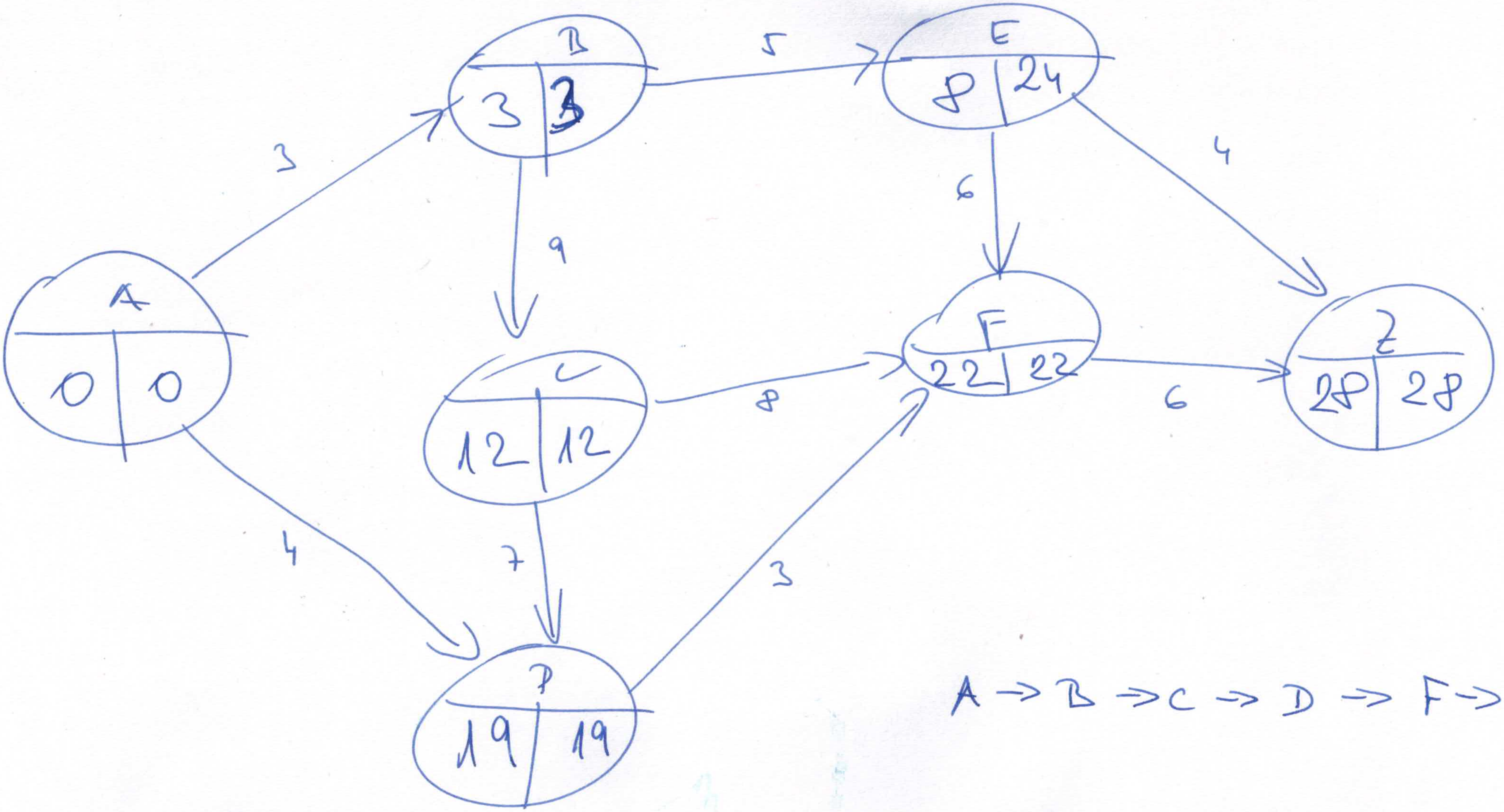
7) $J(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - 3 - 1 & x^2 \\ -2xy + 3 & -x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy - 4 & x^2 \\ -2xy + 3 & -x^2 \end{pmatrix}$

$J(1,3) = \begin{pmatrix} +2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} +2 - \lambda & 1 \\ -3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm \ldots\ldots$

nestabilní ohnisko



A -> B -> C -> D -> F -> Z