Písemná zkouška a zápočet z Inženýrské matematiky, 21.1.2020 (60 minut)

Body

1	2	3	4	5	6	7	8

Jméno: ....

1. [11 bodů] Diferenciální počet funkcí dvou proměnných, gradient, vektorová funkce.

a) Napište definici parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x.

b) Napište vzorec pro výpočet a využití gradientu skalární funkce $f(x, y)$.

c) Rychlost zvuku ve dřevě je

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}},$$

kde c, E a ϱ jsou rychlost zvuku, Youngův modul a hustota v jednotkách metr za sekundu, pascal a kilogram na metr krychlový. Najděte obě parciální derivace funkce $c(E, \varrho)$, jejich jednotku a slovní interpretaci.

d) Tabulka (`http://math.ucsd.edu/~ashenk`) udává množství potravy F (v librách, lb) pro koně o hmotnosti w (v librách, lb), který pracuje t hodin denně. Odhadněte pomocí centrální diference hodnotu parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial t}$ v bodě $w = 900$, $t = 4$ napište i jednotku této parciální derivace a slovní interpretaci. Logicky zdůvodněte, proč má derivace takové znaménko, jaké Vám vyšlo.

hmotnost [lb]	**doba práce** [hod]			
w	$t = 6$	$t = 4$	$t = 2$	$t = 0$
800	18,7	17,9	16,9	12,9
900	20,5	19,5	18,5	14,1
1000	22,2	21,2	20,1	15,3
1100	23,8	22,8	21,5	16,4
1200	25,4	24,3	23,0	17,5

Tabulka množství potravy v závislosti na hmotnosti a délce pracovního výkonu. Pozor, čas se směrem doprava zkracuje a hmotnost roste směrem dolů.

2. [8 bodů] Uvažujme lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{1}$$

a operátor

$$L[y] = y' + a(x)y.$$

a) Dokažte, že operátor L je lineární.

b) Zachovává operátor L rozdíl?

c) Zachovává operátor L součin?

3. [7 bodů]

a) Matti Lepparänta (A Review of Analytical Models of Sea-Ice Growth, Atmosphere–Ocean 1993) odvodil z rovnice vedení tepla a fyzikálních předpokladů o chování ledu, že tloušťka ledu na hladině moře roste ve stabilních podmínkách rychlostí nepřímo úměrnou této tloušťce. Zapište tento fakt pomocí vhodného matematického modelu.

b) Počet nakažených chřipkou y v kraji o počtu obyvatel M je úměrný současně počtu nemocných a počtu zdravých jedinců. Sestavte diferenciální rovnice modelující takovéto šíření chřipky.

c) U každé z rovnic samostatně určete, zda je tato rovnice lineární a zda je to rovnice se separovanými proměnnými?

d) Existuje rovnice, která je současně lineární i se separovanými proměnnými? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, odpověď zdůvodněte.

4. [4 body] Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Množina M je zadána nerovnostmi $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

5. [5 bodů] Derivace součinu není součin derivací, ale někdy by to náhodou mohlo vyjít. Platí $(x^2)' = 2x$. Najděte všechny funkce y pro které derivace jejich součinu s x^2 je rovna součinu derivací, tj.

$$(yx^2)' = y'(x^2)' = 2xy'.$$

6. [4 body] Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - 9y = \pi$$

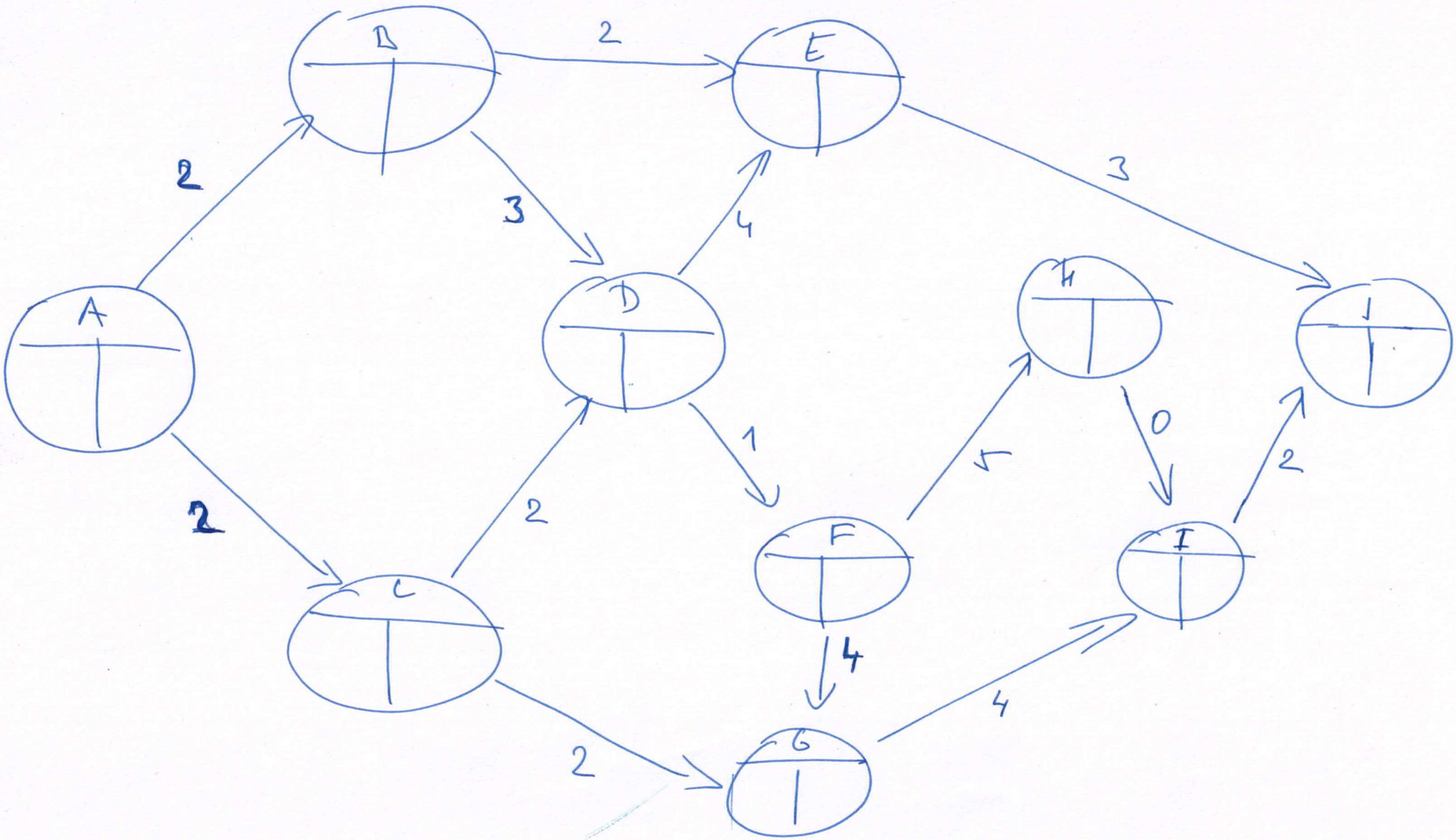
7. [5 bodů] Je dán autonomní systém

$$x' = x^2 + 2y - 2$$
$$y' = -xy^4 + y - 1$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [0, 1]$. Určete typ stacionárního bodu S_1. Načrtněte tvar trajektorií typický pro okolí stacionárního bodu tohoto typu.

8. [6 bodů] Najděte kritickou cestu v grafu na druhé straně.

- Požadavek: Alespoň 16 bodů z 50 možných.


A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
2
2
2
3
2
4
1
4
2
5
3
0
4
2

1 (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(b) $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ Např. v Fickově zákoně je tak nějaký gradient.

(c) $\frac{\partial c}{\partial E} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{1}{2} E^{-1/2}$ Změna rychlosti zvuku při zvýšení modulu pružnosti o 1 Pa.

Jednotka je $m\, s^{-1}\, Pa^{-1}$

$\frac{\partial c}{\partial \rho} = \sqrt{E}\,(-1)\,\rho^{-3/2}$ Změna rychlosti zvuku při zvýšení hustoty o 1 $kg\, m^{-3}$

Jednotka je $m\, s^{-1} (kg\, m^{-3})^{-1} = m^4 s^{-1} kg^{-1}$

(d) $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{20{,}5 - 18{,}5}{6 - 2} = \frac{+2}{4} = \frac{1}{2}\ lb \cdot h^{-1}$

Na hodinu práce navíc je potřeba $\frac{1}{2}$ libry zdroje přidat.
Hladová: čím co více pracuje tím více žere

---

2 (a) $L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = (c_1 y_1 + c_2 y_2)' + a(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) =$

$= c_1 y_1' + c_2 y_2' + a(x) c_1 y_1 + a(x) c_2 y_2 =$

$= c_1 (y_1' + a(x) y_1) + c_2 (y_2' + a(x) y_2) = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2]$

(b) ano, jedná se o speciální případ pro $C_1 = 1$ a $C_2 = -1$.

(c) ne. ani dorovnice tuto vlastnost nemá $(a(x) = 1)$

3 a) $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{k}{h}$

b) $\dfrac{dy}{dt} = k \cdot y\,(M - y)$

c) obě jsou separovatelné, oni podle mne lineární

d) ano. Např. $y' = 0$ nebo $y' = y$ ~~nebo~~ nebo $y' = x \cdot y$

---

4) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 x^2 \cdot 1 \, dy \, dx = \int_0^1 x^2 \, dx \cdot \int_0^1 dy = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \cdot 1 = \frac{1}{3}$

---

5) $(y x^2)' = y' \cdot x^2 + y \cdot 2x$

$y' x^2 + y \cdot 2x = 2x y' \qquad | \cdot \frac{1}{x}$

$x y' + 2y = 2y'$

$y'(x - 2) = -2y$

$y' = -\dfrac{2}{x-2}\, y$

$y = C \cdot e^{-\int \frac{2}{(x-2)^2} dx} = C \cdot e^{-2 \ln|x-2|}$

$= C \cdot e^{\ln (x-2)^{-2}} = \dfrac{C}{(x-2)^2}$

---

6) $y'' - 9y = \pi \qquad \alpha)\ \lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3$

$\beta)\ y = a \qquad -9a = \pi \Rightarrow a = -\dfrac{\pi}{9}$

$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - \dfrac{\pi}{9}$

7) $J(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ -y^4 & -4xy^3+1 \end{pmatrix}$

$J(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad |J(0,1)| = 2$

$Tr(J(0,1)) = 1$

$\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$

nestabilní ohnisko