Písemná zkouška a zápočet z Inženýrské matematiky, 14.1.2020 (60 minut)

Body

1	2	3	4	5	6	7	8

Jméno: ....

1. [11 bodů] Diferenciální počet funkcí dvou proměnných.

a) Napište definici parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle x.

b) Napište definici a praktický význam gradientu funkce $f(x,y)$.

c) Jedna z taktik hospodaření s podzemní vodou je stavba jakýchsi "podzemních rybníků". Předpokládejme, že pro zadržení podzemní vody budujeme pod zemí rovinnou betonovou hráz. Beton tuhne pomalu a při tuhnutí generuje teplo. Napište rovnici vedení tepla pro *homogenní izotropní materiál*, *stacionární stav* a přidejte do rovnice člen *se zdroji tepla*. Rozepište tuto rovnici i do složek pro *dvourozměrný případ*.

d) Z tabulky s pocitovou teplotou na druhé straně najděte derivaci pocitové teploty podle rychlosti větru při teplotě -15 stupňů Celsia a rychlosti větru 50 kilometrů za hodinu. Napište, zda používáte dopřednou nebo centrální diferenci.

---

2. [4 body] Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Množina M je zadána nerovnostmi $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \sqrt{x}$.

---

3. [6 bodů]

a) Po havárii v jaderné elektrárně se neví, jestli v havarovaném reaktoru probíhá dále štěpení. Vědci navrhli zjistit situaci měřením jódu, protože má krátkou dobou rozpadu. Za den se rozpadne 8% radioaktivního jódu ^{131}I. Napište rovnici modelující rychlost s jakou roste množství jódu ^{131}I vyprodukovaného reaktorem do okolí za předpokladu, že stále probíhá štěpení a reaktor vyprodukuje do okolí každý den 1986 kilogramů ^{131}I.

b) Z válcové nádrže vytéká voda otvorem ve dně voda rychlostí úměrnou odmocnině z výšky hladiny a odpařuje se konstantní rychlostí. Napište diferenciální rovnici pro objem vody nebo výšku hladiny v nádrži.

---

4. [8 bodů] Uvažujme homogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' + a(x)y = 0 \tag{1}$$

a operátor

$$L[y] = y' + a(x)y.$$

a) Ukažte, jak z nenulového řešení rovnice obdržíme obecné řešení rovnice. Zaměřte se i na to, zda výsledné řešení je skutečně obecným řešením, tj. zda je možné splnit libovolnou počáteční podmínku.

b) Linearita v sobě zahrnuje to, že operátor zachovává součet a násobení konstantou. V odpovědi na předchozí bod vyznačte, kde se využívá toho, že operátor zachovává součet a kde se využívá toho, že operátor zachovává násobení konstantou.

---

5. [5 bodů] Napište definici lokálního maxima funkce dvou proměnných a vzorec pro lineární aproximaci funkce dvou proměnných.

---

6. [5 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y = 3$$

---

7. [5 bodů] Je dán autonomní systém

$$x' = x + 2y - 2$$
$$y' = xy^2 - 5y + 5$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [0,1]$. Určete typ stacionárního bodu S_1. Načrtněte tvar trajektorií typický pro okolí stacionárního bodu tohoto typu.

---

8. [6 bodů] Nakreslete si graf "Domeček jedním tahem".

a) Všechny hrany mají stejné grafové ohodnocení. Najděte tři různé kostry podle těchto požadavků:

(i) Minimální a jde nakreslit jedním tahem.

(ii) Minimální a nejde nakreslit jedním tahem.

(iii) Není minimální.

Pokud některá kostra neexistuje, vysvětlete proč.

b) Změňte ohodnocení na $1, 2, 3, \ldots$. Ohodnocení k hranám přiřaďte libovolně. Pro takový graf najděte opět tři různé kostry s požadavky z předchozího bodu. Pokud některá kostra neexistuje, vysvětlete proč.

- Požadavek: Alespoň 16 bodů z 50 možných.

Wind chill chart (Celsius)

temperature (°C)

wind speed (kph)	5	0	–5	–10	–15	–20	–25	–30	–35	–40
calm	5	0	–5	–10	–15	–20	–25	–30	–35	–40
10	3	–3	–9	–15	–21	–27	–33	–39	–45	–51
20	1	–5	–12	–18	–24	–31	–37	–43	–49	–56
30	0	–7	–13	–20	–26	–33	–39	–46	–52	–59
40	–1	–7	–14	–21	–27	–34	–41	–48	–54	–61
50	–2	–8	–15	–22	–29	–35	–42	–49	–56	–63
60	–2	–9	–16	–23	–30	–37	–43	–50	–57	–64
70	–2	–9	–16	–23	–30	–37	–44	–51	–59	–66
80	–3	–10	–17	–24	–31	–38	–45	–52	–60	–67
90	–3	–10	–17	–25	–32	–39	–46	–53	–61	–68
100	–3	–11	–18	–25	–32	–40	–47	–54	–61	–69

wind chill (°C) = $13.12 + 0.6215T - 11.37(V^{0.16}) + 0.3965T(V^{0.16})$

T = air temperature (°C)

frostbite times: 30 minutes, 10 minutes, 5 minutes

V = wind speed (kph)

Source: U.S. National Weather Service; Meteorological Services of Canada

① a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$

b) $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \right)$ ... směr maximálního růstu funkce f

c) $\rho \cdot c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \delta + \operatorname{div}(D \nabla T) = \delta + D . \nabla^2 T$

ve 2D:

$$\rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} = \delta + D\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

d)

dopředná: $\dfrac{-30-(-29)}{60-50} = \dfrac{-1}{10} = -0{,}1$ °C/km hod^{-1}

centrální: $\dfrac{-30-(-27)}{60-40} = \dfrac{-3}{20} = -0{,}15$ °C/km hod^{-1}

---

② $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} xy \, dy \, dx = \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{x}} dx = \cancel{\int_0^1 \frac{1}{2} x^3 \Big|_0 } dx =$

$\displaystyle = \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \, dx = \left[\frac{1}{6} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6}$

---

③

a) $\dfrac{dm}{dt} = 1986 - 0{,}08\,m$

b)

$\dfrac{dh}{dt} = -k_1 \sqrt{h} - k_2$ nebo $\dfrac{dV}{dt} = -k_1 \sqrt{V} - k_2$

(V je násobkem h a rovnice jsou skoro stejné)

4) a) Je-li $L[y_p]=0$, platí

$$L[C\cdot y_p] \overset{(*)}{=} C\cdot L[y_p] = C\cdot 0 = 0$$ a

násobek řešení je opět řešením.

Je-li $y(x_0)=y_0$ poč. podm. a $y_p(x_0)\neq 0$, dá se

rovnice $C\cdot y_p(x_0)=y_0$ vyřešit vzhledem k C a ve

tvaru $y(x)=C\cdot y_p(x)$ jsou proto všechna řešení.

Obsahuje totiž řešení libovolné počáteční úlohy.

b) Vlastnost, že se zachovává konstantní násobek je použita v místě (*). Vlastnost, že se zachovává součet nepoužíváme.

---

5) $f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$ pro všechna (x,y) v okolí bodu (x_0,y_0)

$$f(x,y)\simeq f(x_0,y_0)+\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,\,y-y_0)$$

nebo

$$f(x,y)\simeq f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

---

6) a) $y''-2y=0 \Rightarrow \lambda^2-2=0 \Rightarrow \lambda=\pm\sqrt{2}$

b) $y=a \Rightarrow -2a=3 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$

$$y=C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}-\frac{3}{2}$$

7)

$f(x,y) = x + 2y - 2$

$g(x,y) = xy^2 - 5y + 5$

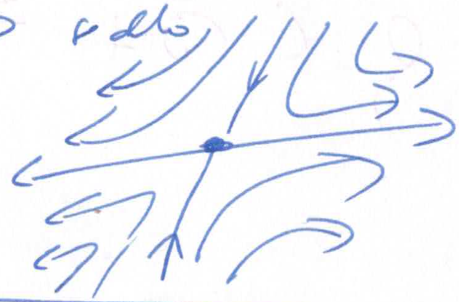
$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y^2 & 2xy - 5 \end{pmatrix}$$

$$J(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$|J| = -5 - 2 = -7$

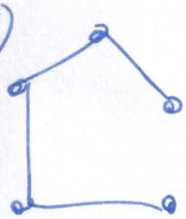
$Tr(J) = -4$

$\lambda^2 + 4\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{matrix} \Rightarrow$ sedlo

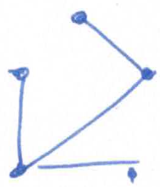


---

8) a) (i)

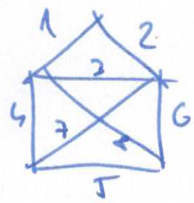


(ii)

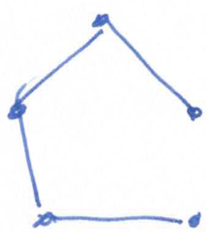


(iii) nelze, všechny kostry jsou minimální, mají stejný počet hran

b)



(i)



Minimální kostra je právě jedna, proto (ii) nemá řešení

(iii)