Body

1	2	3	4	5	6	7	8

Jméno: ....

1. [11 bodů] Diferenciální počet funkcí dvou proměnných, gradient, vektorová funkce.

a) Napište definici parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle x.

b) Napište definici a praktický význam divergence vektorové funkce f.

c) Zformulujte rovnici kontinuity, napište intepretaci jednotlivých členů této rovnice a jednu z aplikací (název nebo popis děje, který je možno touto rovnicí modelovat).

d) Tabulka udává tlak vzduchu $p = f(x,y)$ v milibarech jako funkci vzdálenosti x mil východně a y mil severně od New Orleans během hurikánu Katrina 29. srpna 2005. Odhadněte parciální derivaci $\dfrac{\partial p}{\partial y}$ (včetně jednotky) v bodě $(0,0)$ a podejte praktickou interpretaci této hodnoty. Použijte obě varianty: dopřednou i centrální diferenci.

	$x=-30$	$x=0$	$x=30$
$y=30$	997	990	950
$y=0$	985	977	960
$y=-30$	968	950	990

(Podle math.ucsd.edu/~ashenk/Section14_3.pdf)

2. [4 body] Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Množina M je zadána nerovnostmi $0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le 1$.

3. [6 bodů]

a) Matti Lepparänta (A Review of Analytical Models of Sea-Ice Growth, Atmosphere–Ocean 1993) odvodil z rovnice vedení tepla a fyzikálních předpokladů o chování ledu, že tloušťka ledu na hladině moře roste ve stabilních podmínkách rychlostí nepřímo úměrnou této tloušťce. Zapište tento fakt pomocí vhodného matematického modelu.

b) V zimě u elektromobilu funguje systém pro ohřev baterie. Proto se doporučuje nechat elektromobil v nabíječce i když je baterie nabita naplno. Uvažujme jednoduchý model elektromobilu v zamrzlé garáži, kdy je baterie ohřívána konstatní rychlostí elektrickým proudem a současně vlivem tepelné výměny ochlazována rychlostí uměrnou rozdílu teploty baterie a okolního prostředí (Newtonův zákon tepelné výměny). Modelujte tento proces. Přesněji: napište diferenciální rovnici pro teplotu baterie.

4. [8 bodů] Uvažujme lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (1)$$

a operátor

$$L[y] = y' + a(x)y.$$

a) Dokažte, že operátor L je lineární.

b) Ukažte, že řešení může být tvaru $y = Cx^2$ nebo $y = C + x^2$. Rovnice s těmito řešeními najděte.

5. [4 body] Ukažte, že jak souvisí řešení lineárního autonomní systém s konstantními koeficienty a vlastní vektory a hodnotu. Ukažte, že jestliže U je vlastním vektorem matice systému s vlastní hodnotou λ, potom má systém řešení ve tvaru $X(t) = Ue^{\lambda t}$.

6. [6 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' + \frac{2}{x}y = 1$$

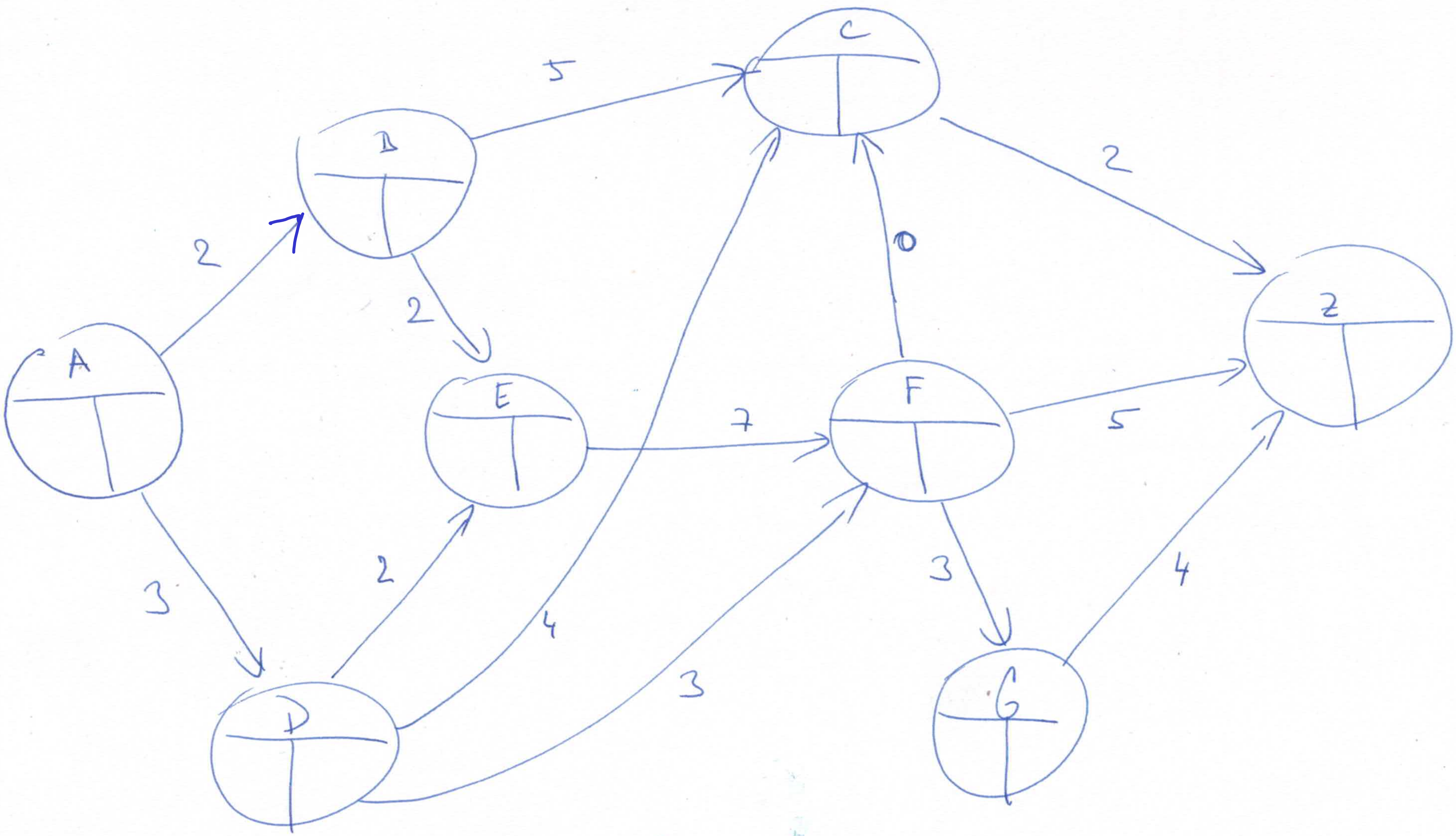
7. [5 bodů] Je dán autonomní systém

$$x' = x^2 + 2y - 2$$
$$y' = -xy^4 + 6y - 6$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [0,1]$. Určete typ stacionárního bodu S_1. Načrtněte tvar trajektorií typický pro okolí stacionárního bodu tohoto typu.

8. [6 bodů] Najděte kritickou cestu v grafu na druhé straně.

- Požadavek: Alespoň 16 bodů z 50 možných.


A
B
C
D
E
F
G
Z
2
3
5
2
2
4
3
7
0
2
5
3
4

a) $\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$

b) $\vec{F} = (P, Q)$ $\quad \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$

přírůstek toku vektorového pole $\vec{F}$. Udává, o kolik více vektorového pole z daného místa vyteče, než přiteče.

c) $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma - \operatorname{div} \vec{j}$

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ... rychlost růstu veličiny v daném bodě

σ ... množství vygenerované za jednotku času ze zdroje

$-\operatorname{div} \vec{j}$ ... množství, které v místě za jednotku času přibude díky změně toku vekt. pole $\vec{j}$

ρ ... stavová veličina, která se zachovává

$\vec{j}$ ... vektorové pole přenášející veličinu ρ

d)

dopředná: $\frac{990 - 977}{30 - 0} = 0{,}43$ milibar/míle

centrální: $\frac{990 - 950}{30 - (-30)} = 0{,}67$ milibar/míle

Severním směrem roste tlak s každou mílí přibližně o 0,43 resp. 0,67 milibaru.

---

(2)

$$\iint_M xy \, dx\, dy = \int_0^1 \int_{x^2}^1 xy \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x y^2\right]_{x^2}^1 dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^5 \, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

3a) $\frac{dh}{dt} = \frac{k}{h}$

b) $\frac{dT}{dt} = k_1 - k_2(T - T_{venku})$

---

4) a) $L[c_1y_1 + c_2y_2] = (c_1y_1 + c_2y_2)' + a(x)(c_1y_1 + c_2y_2) =$

$= c_1y_1' + c_2y_2' + a(x)c_1y_1 + a(x)c_2y_2 =$

$= c_1(y_1' + a(x)y_1) + c_2(y_2' + a(x)y_2) = c_1L[y_1] + c_2L[y_2]$

b) $y = Cx^2 \Rightarrow$ ~~$y' =$~~ $\quad y x^{-2} = C \quad \Big| \frac{d}{dx}$

$y' x^{-2} + y(-2)x^{-3} = 0 \quad | \cdot x^2$

$\boxed{y' - \frac{2}{x}y = 0}$

$y = C + x^2 \Rightarrow y' = 2x \Rightarrow \boxed{y' = 2x}$

---

6) $y' + \frac{2}{x}y = 1$ $\quad \int \frac{2}{x} = 2\ln|x| = \ln x^2$

$e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{\ln x^2} = x^2$

$x^2y' + 2xy = x^2$

$(x^2y)' = x^2$

$x^2y = \frac{1}{3}x^3 + C$

$y = \frac{1}{3}x + Cx^{-2}$

5) $x' = u \cdot \lambda e^{\lambda t}$

$Ax = A \cdot (ue^{\lambda t}) = e^{\lambda t} \cdot A \cdot u = e^{\lambda t} \cdot \lambda \cdot u$

tj. platí $x' = Ax$ a x je řešením jedině platí $Au = \lambda u$ tj. jedině je u vlastní vektor příslušný hodnotě λ.

---

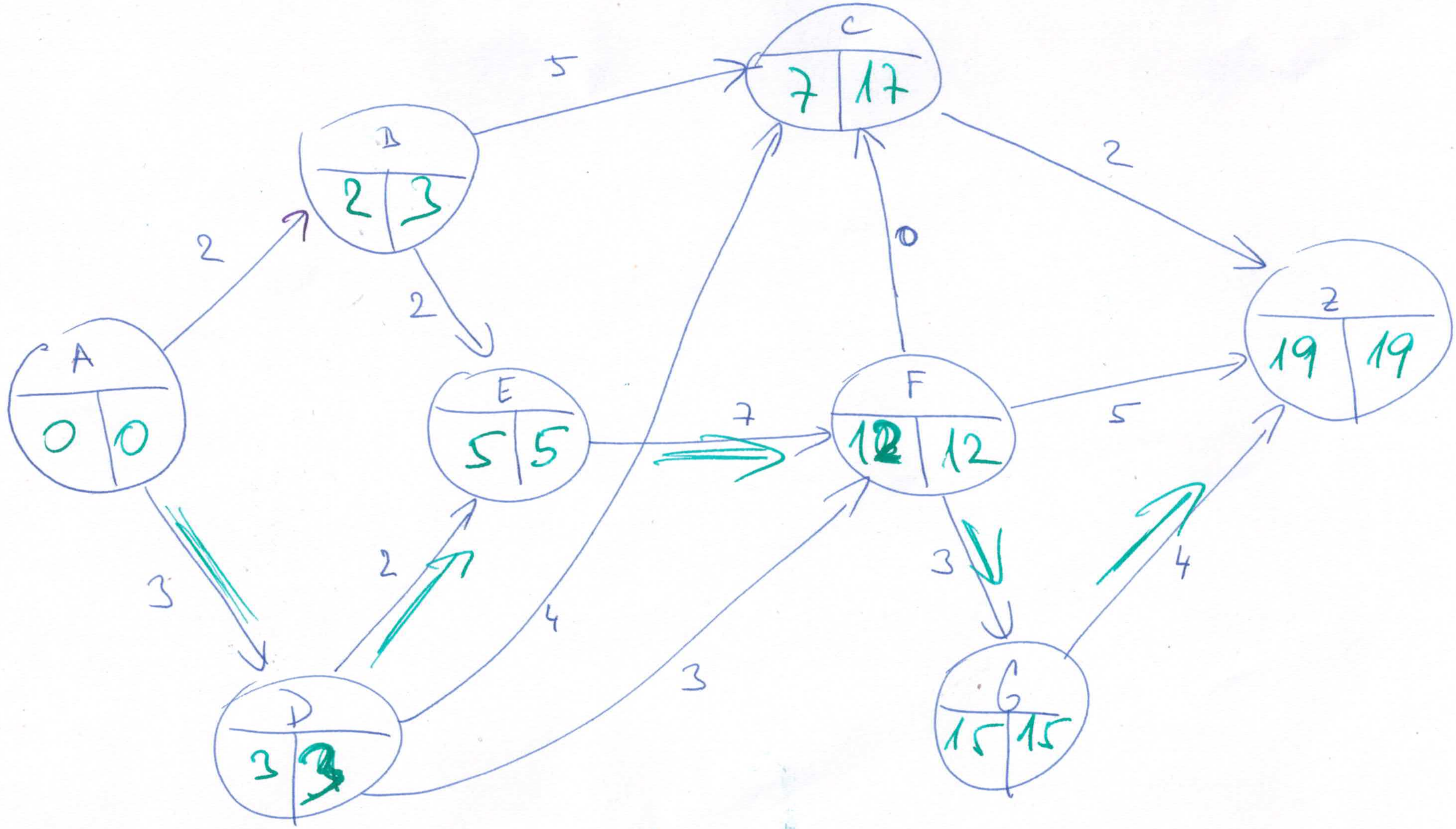
7) $f = x^2 + 2y - 2$

$g = -xy^4 + 6y - 6$

$J(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ -y^4 & -4xy^3 + 6 \end{pmatrix}$ $\quad J(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -6\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 6\lambda + 2$

$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 8}}{2}$ $\quad \lambda_{1,2} > 0$ Nestabilní uzel



A-D-E-F-G-Z