Písemná zkouška a zápočet z Inženýrské matematiky, 18.12.2019 (60 minut)

Body

1	2	3	4	5	6	7	8

Jméno: ....

1. [11 bodů] Diferenciální počet funkcí dvou proměnných, gradient, vektorová funkce.

a) Napište definici parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle x a gradientu funkce f.

b) Funkce $f(x,y)$ má v bodě $(2,1)$ gradient $\nabla f(2,1) = (3,-2)$ a funkční hodnotu $f(2,1) = 0$. Najděte její

(i) parciální derivace v bodě $(2,1)$,

(ii) lineární aproximaci v bodě $(2,1)$,

(iii) určete, zda má v bodě $(2,1)$ lokální extrém.

Pokud některou z částí není možno splnit, napište, jakou minimální dodatečnou informaci o funkci f potřebujeme.

c) Tabulka (`http://math.ucsd.edu/~ashenk`) udává množství potravy F (v librách, lb) pro koně o hmotnosti w (v librách, lb), který pracuje t hodin denně. Odhadněte pomocí centrální diference hodnotu parciální derivace $\dfrac{\partial F}{\partial w}$ v bodě $w = 1000$, $t = 4$ napište i jednotku této parciální derivace a slovní interpretaci. Logicky zdůvodněte, proč má derivace takové znaménko, jaké Vám vyšlo.

hmotnost [lb]	**doba práce** [hod]			
w	$t=6$	$t=4$	$t=2$	$t=0$
800	18,7	17,9	16,9	12,9
900	20,5	19,5	18,5	14,1
1000	22,2	21,2	20,1	15,3
1100	23,8	22,8	21,5	16,4
1200	25,4	24,3	23,0	17,5

Tabulka množství potravy v závislosti na hmotnosti a délce pracovního výkonu.
Pozor, čas se směrem doprava zkracuje.

2. [4 body] Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Množina M je zadána nerovnostmi $0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le 1$.

3. [6 bodů]

a) Nádrž se plní vodou tak, že přítok je konstantní a odtok je úměrný objemu. Zapište tento proces kvantitativně vhodným matematickým modelem.

b) Kapka vody kulovitého tvaru v atmosféře roste tak, že rychlost, s jakou se zvětšuje její objem je přímo úměrná velikosti povrchu. Sestavte diferenciální rovnici popisující změnu objemu kapky v čase.

4. [8 bodů] Uvažujme homogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' + a(x)y = 0 \tag{1}$$

a operátor

$$L[y] = y' + a(x)y.$$

a) Dokažte, že operátor L je lineární.

b) Napište, jak z linearity plyne, že obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice (1) nemůže být tvaru $y = x^{2019} + C$.

5. [4 body] Napište, jak souvisí lineární aproximace funkce (použitá např. v 1b) s Jacobiho maticí autonomního systému a jak spolu souvisí Jacobiho a Hessova matice.

6. [6 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + 2y' + 3y = -5$$

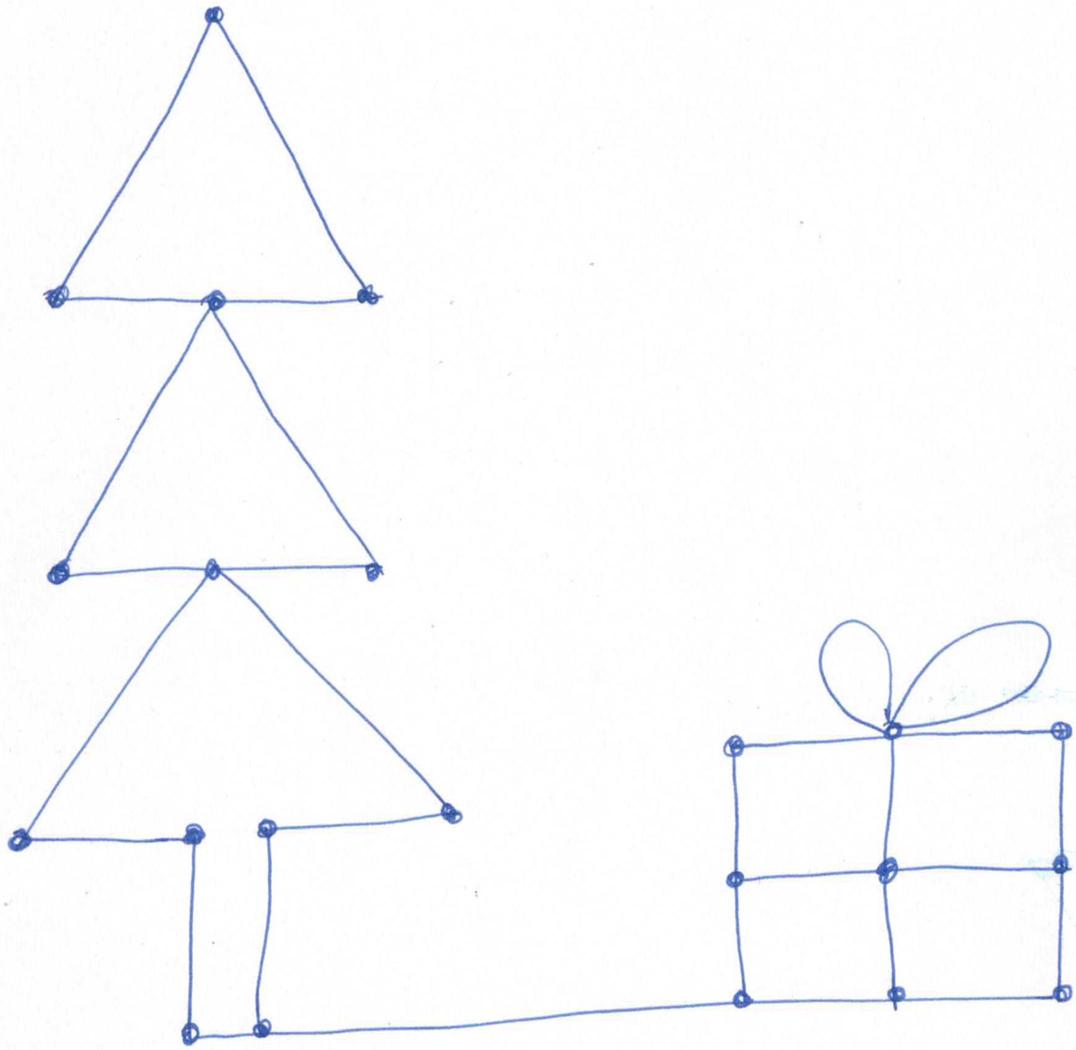
7. [5 bodů] Je dán autonomní systém

$$x' = x^2 + 2y - 2$$
$$y' = -xy^4 + 6y - 6$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [0,1]$. Určete typ stacionárního bodu S_1. Načrtněte tvar trajektorií typický pro okolí stacionárního bodu tohoto typu.

8. [6 bodů] Napište, kdy je možné graf nakreslit jedním tahem a rozhodněte, zda toto platí pro graf na opačné straně zadání.

- Požadavek: Alespoň 16 bodů z 50 možných.



Inženýrská matematika 18. 12. 2019

[11/3]

1) a) $\frac{\partial f}{\partial x} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$

$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

b)

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -2$

(ii) $f(x,y) \approx 3(x-2) - 2(y-1)$

(iii) ne, protože parciální derivace jsou nenulové

---

c) $\left[\frac{\partial F}{\partial w}\right] = \frac{lb}{lb} = 1$ (bez jednotky)

$\frac{\partial F}{\partial w}(1000, 4) = \frac{22{,}8 - 19{,}5}{200} \doteq 0{,}0165$

Na každých 100 liber váhy navíc potřebuje kůň o hmotnosti 1000 liber pracující 4 hodiny přibližně 1,65 libry potravy navíc.

Těžší kůň pracující stejnou intenzitou potřebuje více potravy, proto je derivace kladná.

---

2) $\int_0^1 \int_{x^2}^1 xy \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{x^2}^1 dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^5 \, dx$

$= \left[\frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

---

3) a) $\frac{dV}{dt} = k_1 - k_2 V$

b) $\frac{dV}{dt} = k \cdot V^{2/3}$

4/3

4) a) $L[C_1y_1+C_2y_2] = (C_1y_1+C_2y_2)' + a(x)(C_1y_1+C_2y_2) =$

$= C_1y_1' + C_2y_2' + a(x).C_1.y_1 + a(x).C_2y_2 =$

$= C_1y_1' + a(x).C_1y_1 + C_2y_2' + a(x)C_2y_2 =$

$= C_1[y_1' + a(x)y_1] + C_2[y_2' + a(x)y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2]$

5) Je-li $L[y]=0$ potom $L[C.y] = C.L[y] = C.0 = 0$

tj. násobek je také řešením.

Je-li jedno řešení $y = x^{2019}$, řešením jsou

$y = C.x^{2019}$ a ne $y = x^{2019} + C$.

5) Pro autonomní systém $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ je lineární

aproximace funkcí $f(x,y)$ a $g(x,y)$ v okolí stacionárního

bodu možné zapsat maticově $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = J \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$

kde J je Jacobiho matice.

Hessova matice je Jacobiho matice pro gradient.

6) i) $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}\,i$

ii) $y = a \quad y' = y'' = 0$

$3a = -5 \Rightarrow a = -\frac{5}{3}$

$y = C_1e^{-x}\cos(\sqrt{2}x) + C_2e^{-x}\sin(\sqrt{2}x) - \frac{5}{3}$

7) $f = x^2 + 2y - 2$

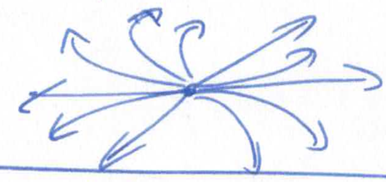
$g = -xy^4 + 6y - 6$

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ -y^4 & -4xy^3+6 \end{pmatrix} \qquad J(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(6-\lambda) - 2(-1) = \lambda^2 - 6\lambda + 2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{\cancel{32}\,28}}{2} > 0$$

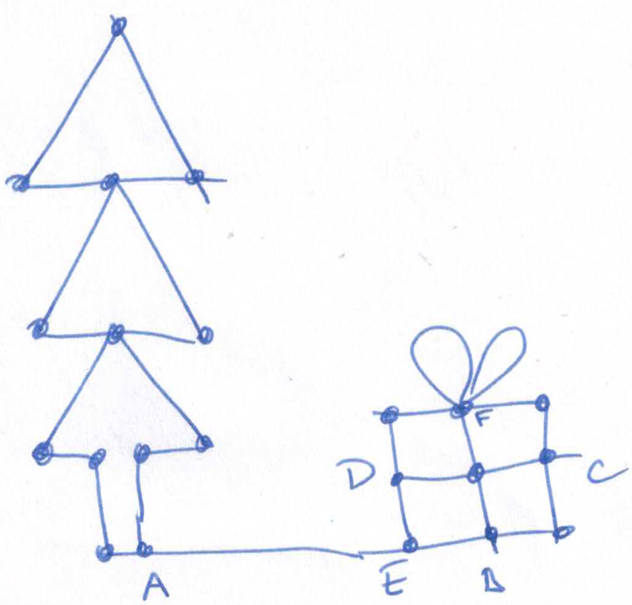
Nestabilní uzel



---

8) Graf je možné nakreslit jedním tahem právě tehdy, když má všechny uzly sudého stupně nebo právě dva uzly lichého stupně.

Graf na obrázku toto nesplňuje:



A, B, C, D, E, F jsou uzly lichého stupně.