Lineární algebra

22. 11. 2021

1) Matice jako zobrazení

u ... vektor nebo bod v n-rozměrném prostoru

A ... matice

$A.u$ ... obraz vektoru nebo souřadnice v jiné soustavě

2) Vlastní čísla a vektory

$A.u = \lambda.u$

u ... vlastní vektor

λ ... vlastní číslo

a) smysl definice: vzor u a obraz $A.u$ jsou rovnoběžné a λ je podíl délek těchto vektorů.

b) výpočet: $(A - \lambda I)u = 0$ .. soustava rovnic

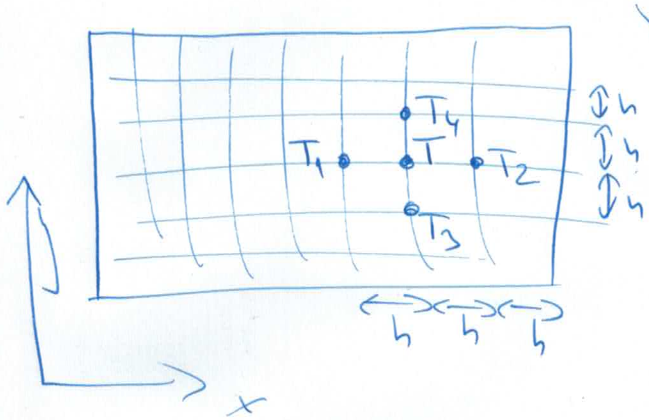
c) užitek: Při transformaci tenzoru A do souřadné soustavy s osami ve vlastních směrech dostaneme diagonální matici

$$D = P^{-1} A P.$$

Sloupce matice přechodu P jsou vlastní vektory jednotkové délky a $P^{-1} = P^T$.

3) Rozložení tepla ve stacionárním stavu ve 2D (nebo libovolný transportní děj, viz následující přednáška)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots \text{fyzikální model}$$



Derivace aproximujeme konečnými diferencemi (Přednáška číslo 2).

$$\frac{T_1 - 2T + T_2}{h^2} + \frac{T_3 - 2T + T_4}{h^2} = 0$$

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T = 0$$

$$T = \frac{1}{4}\left(T_1 + T_2 + T_3 + T_4\right)$$

Pro každý bod mřížky máme lineární rovnici s pěti neznámými.

4) Jak může vypadat soustava lineárních rovnic

- Těžká

$$\begin{aligned} 9x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 15x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 &= 9 \end{aligned} \qquad (1)$$

- Lehká (postupně ubývá neznámých)

$$\begin{aligned} 9x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 &= 6 \\ 7x_3 &= 12 \end{aligned} \qquad (2)$$

- Superlehká (s diagonální maticí)

$$\begin{aligned} 7x_1 &= 9 \\ 5x_2 &= 6 \\ 9x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad (3)$$

Jak vyřešit „těžkou" (1) ?

$$(1) \xrightarrow[\text{eliminace}]{\text{Gaussova}} (2) \Longrightarrow$$ odspodu dopočítávat neznámé

$$(1) \xrightarrow[\text{metoda}]{\text{Jacobiho}}$$ „něco jako (3)", ale musí se počítat numericky a iterovat