

# Dvojný integrál

## Kvadratický moment pro obdélník

Vypočtete integrál

$$\iint_{\Omega} y^2 \, dx dy,$$

přes obdélník se stranami podél os, se středem v počátku a délkou stran  $a$  a  $b$ , tj. přes množinu  $\Omega$  danou nerovnostmi

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, \\ -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

---

*Řešení.*

$$\iint_{\Omega} y^2 \, dx dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \times \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \, dy = a \times \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = a \times \left( \frac{1}{3} \times \frac{b^3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{b^3}{8} \right) = \frac{1}{12} ab^3$$

## Těžiště trojúhelníku

Vypočtete integrál

$$\iint_{\Omega} x \, dx dy$$

přes trojúhelník  $\Omega$  s vrcholy v bodech  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  a  $(0, 1)$  a poté vydělením obsahem trojúhelníka najdete  $x$ -ovou polohu těžiště.

---

*Řešení.*

Rovnice přímky, ve které leží přepona trojúhelníka, je

$$y = 1 - x$$

a trojúhelník tedy je možno zapsat soustavou nerovností

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1 - x. \end{aligned}$$

Použitím těchto nerovností můžeme dvojný integrál transformovat na dvojnásobný a vypočítat.

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} x \, dx dy &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x \, dy dx = \int_0^1 [xy]_0^{1-x} \, dx = \int_0^1 x(1-x) \, dx \\ &= \int_0^1 x - x^2 \, dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$x_T = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

## Velikost tlakové síly na hráz přehrady

Viz video ke cvičení a text k přednášce.

## Působíště tlakové síly na hráz přehrady

Viz video ke cvičení a text k přednášce.