Vlastní čísla a směry

Vektor, který není vlastním směrem

Ukažte, že vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ není vlastním směrem matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

Pomocí maticového násobení vidíme, že platí

$$A\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Výsledkem zobrazení vektoru pomocí matice je vektor který není násobkem původního vektoru (podle první komponenty by se muselo jednat o trojnásobek, ale to nekoresponduje s druhou komponentou) a proto se nejedná o vlastní vektor matice.

Vektor, který je vlastním směrem

Ukažte, že vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ je vlastním směrem matice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a určete příslušné vlastní číslo

Řešení.

Pomocí maticového násobení vidíme, že platí

$$A\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Výsledkem zobrazení vektoru $\vec{a}$ pomocí matice je vektor $\begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}$, který je šestinásobkem původního vektoru $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Protože je obraz násobkem vzoru, jedná se o vlastní vektor matice. Příslušné vlastní číslo je 6, protože se vektor zobrazuje na svůj šestinásobek.

Vlastní čísla a vektory matice 2×2

Najděte vlastní čísla matice
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
a jim příslušné vlastní vektory.

Řešení.

Vlastní čísla jsou nulovými body determinantu
$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda) - (2)(2) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3).$$

Vlastní číslo $\lambda_1 = 2$. Protože platí
$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$
řešíme soustavu
$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
která má nekonečně mnoho řešení. Musíme najít alespoň jendo nenulové řešení. Pokud zapíšeme jako soustavu rovnic, dostáváme druhou rovnici ve tvaru
$$2x_1 - x_2 = 0$$
a první rovnice je jejím násobkem. Volbou $x_1 = 1$ dostáváme $x_2 = 2x_1 = 2$ a vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$ je $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tento vektor je dán jednoznačně až na nenulový konstantní násobek.

Vlastní číslo $\lambda_2 = -3$. Protože platí
$$A - (-3)I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$
řešíme soustavu
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
která má nekonečně mnoho řešení. Musíme najít alespoň jendo nenulové řešení. Pokud zapíšeme jako soustavu rovnic, dostáváme první rovnici ve tvaru
$$x_1 + 2x_2 = 0$$
a druhá rovnice je jejím násobkem. Volbou $x_2 = 1$ dostáváme $x_1 = -2x_2 = -2$ a vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = -3$ je $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tento vektor je dán jednoznačně až na nenulový konstantní násobek.

Transformace matice 2×2 na diagonální tvar

Uvažujme symetrickou matici
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Určete vlastní čísla a jednotkové vlastní vektory této matice.

2. Sestavte matici P tak, aby ve sloupcích obsahovala jednotkové vlastní vektory. Pokud je to možné, napište matici P tak, aby její determinant byl kladný.
3. Ověřte, že $P^T AP = D$ je diagonální matice.

Návod: Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

Řešení.

Charakteristický polynom je

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2)$$

a vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 4$. Protože platí

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

je vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ_1 řešením soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

To je vlastně dvakrát zopakovaná rovnice

$$x_1 + x_2 = 0,$$

která má řešení například $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$. Protože délka vektoru $(1, -1)$ je $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, jednotkový vlastní vektor je $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$. Podobně by se dal najít jednotkový vlastní vektor příslušný druhé vlastní hodnotě, ale protože oba vektory musí být na sebe kolmé, stačí vzít jednotkový vektor, který je k e_1 kolmý, například $e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$. Matici P můžeme vzít s e_1 v prvním a e_2 druhém sloupci, tj.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Rychlý výpočet ukazuje, že matice P má determinant roven jedné. Kdyby vyšel roven minus jedné, stačí prohodit sloupce nebo jeden sloupec vynásobit faktorem -1.

Pokud ještě před násobením matic vytkneme opakující se faktor z obou matic, násobením dostáváme

$$\begin{aligned} P^T AP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podle očekávání vyšla diagonální matice s vlastními hodnotami v hlavní diagonále.

Poměr délky vzoru a obrazu vektoru

Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

z minulého příkladu a vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

určete podíl délky obrazu $A\vec{u}$ a vzoru $\vec{u}$ při zobrazení pomocí matice A. Ověřte, že tento podíl leží mezi menší a větší vlastní hodnotou, které jsme vypočítali v předchozím příkladě.

Řešení.

Platí

$$A\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a výpočetem délek vektorů dostáváme

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

a

$$||A\vec{u}|| = \sqrt{(-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{26}.$$

Podíl délek je

$$\frac{||A\vec{u}||}{||\vec{u}||} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{5}} \approx 2.28$$

což je podle očekávání hodnota mezi menší a větší vlastní hodnotou, které vyšly v předchozím příkladě.

Transformace tenzoru pootočením

Uvažujme tyč ve směru osy x namáhanou v ose tahem, při kterém vzniká jednotkové tahové napětí. Tyč je slepena spojem, který svírá s kolmicí na osu úhel θ. (Nakreslete si obrázek.) Normálovým napětím rozumíme napětí ve směru kolmém na spoj.

1. Ukažte, že pro nenulový úhel θ je normálové napětí ve spoji menší, než by odpovídalo normálovém napětí pro spoj kolmý na osu tyče.
2. Ukažte, že normálové napětí je klesající funkcí úhlu θ na intervalu od nuly do $\frac{\pi}{2}$.
3. Určete normálové a smykové napětí pro extrémní případ $\theta = \frac{\pi}{2}$ a popište, jak by takový spoj vypadal.
4. Určete smykové napětí ve spoji a určte, pro jakou hodnotu úhlu je smykové napětí největší.
5. Určete, jestli je v tomto případě z hlediska působícího napětí výhodnější udělat šikmý spoj po směru nebo proti směru hodinových ručiček.

Řešení.

V souřadné soustavě podle zadání je tah ve směru osy x roven jedné a další komponenty jsou nulové. Tedy $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Budeme otáčet proti směru hodinových ručiček, tj. o kladný úhel θ.

Dostáváme (při zkráceném označení $S = \sin\theta$ a $C = \cos\theta$)

$$\begin{aligned} R^{-1}\sigma R &= \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & -S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & -CS \\ -CS & S^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a normálová a smyková složka napětí jsou po řadě $\cos^2\theta$ a $-\sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{2}\sin(2\theta)$.

Odsud již dostaneme odpovědi na všechny uvedené otázky.

1. Normálové napětí udává funkce
$$\cos^2\theta.$$
Ta je rovna jedné pro $\theta = 0$, tj. pro nulový sklon spoje. Pro nenulový sklon je menší než jedna (uvažujeme sklon maximálně do 90 stupňů).
2. Derivace normálového napětí pro θ z intervalu od 0 do $\frac{\pi}{2}$ je
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\cos^2\theta = 2\cos\theta(-\sin\theta) = -\sin(2\theta) < 0.$$
Záporná derivace značí klesající funkci.
3. Pro $\theta = \frac{\pi}{2}$ by normálové napětí bylo nulové a smykové také nulové. Jednalo by se vlastně o podélně spojené kusy materiálu a při uvedeném namáhání by bylo jedno, jestli jsou slepené nebo ne.
4. Smykové namáhání je prvek v matici mimo hlavní diagonálu. V našem případě $-\frac{1}{2}\sin(2\theta)$. Smykové namáhání je maximální, pokud má tato funkce maximum nebo minimum. Takový extrém je pro $2\theta = \frac{\pi}{2}$ tj. pro $\theta = \frac{\pi}{4}$. Maximální smykové namáhání je pro spoj skloněný pod úhlem 45 stupňů.
5. Nezáleží. Změnou znaménka u úhlu θ se napětí ve směru kolmo na spoj ani podél spoje nemění, funkce $\cos^2\theta$ i $\sin^2\theta$ jsou obě sudé. U smykového napětí se mění znaménko, ale to jenom znamená namáhání v opačném smyslu (Pokud si na stěnu materiálu nakreslíme čtvereček s jednou stranou podél spoje a s druhou stranou kolmo na spoj, podle směru sklonu spoje máme dva zrcadlové případy, jak se tento čtvereček deformuje. Tomu odpovídá opačné znaménko smykové derivace.)

Vlastní čísla a vektory matice 3×3.

V cvičení z minulého týdne jsme ukázali, že nejobecnější symetrická matice zachovávající směr vektoru $(1,0,0)^T$ má v prvním řádku a prvním sloupci jenom jeden nenulový prvek, prvek v hlavní diagonále.

Uvažujme matici
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$
která je tohoto typu. Určete vlastní čísla a zbylé vlastní vektory matice.

Řešení.

Podle zadání víme, že jeden z vlastních vektorů je $e_1 = (1,0,0)^T$ a protože se zobrazí na pětinásobek, je příslušná vlastní hodnota $\lambda_1 = 5$. Charakteristický polynom je

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} &= (5-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) - (5-\lambda)\times 2\times 2 \\ &= (5-\lambda)\Big[(2-\lambda)(5-\lambda) - 4\Big] \\ &= (5-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6) = (5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-6) \end{aligned}$$

Další dvě vlastní hodnoty jsou $\lambda_2 = 1$ a $\lambda_3 = 6$

Uvažujme matici

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soustava

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

má řešení $x_1 = 0$ (plyne z první rovnice) a například $x_2 = 2$ a $x_3 = -1$ (plyne z druhé a třetí rovnice, které jsou jedna násobkem druhé). Vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě $\lambda_2 = 1$ je $e_2 = (0, 2, -1)^T$.

Uvažujme matici

$$A - 6I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soustava

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

má řešení $x_1 = 0$ (plyne z první rovnice) a například $x_2 = 1$ a $x_3 = 2$ (plyne z druhé a třetí rovnice, které jsou jedna násobkem druhé). Vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě $\lambda_3 = 6$ je $e_3 = (0, 1, 2)^T$.