Matice

Násobení matic

Vynásobte matice A a B pro obě pořadí násobení.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vynásobte matice B a C pro obě pořadí násobení, je-li

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

V tomto příkladě si vyzkoušíme násobení matic a kromě toho uvidíme, že násobení diagonální maticí je v jistém smyslu jednoduché. Podle toho, v jakém pořadí násobíme matice, se diagonálními prvky se násobí řádky nebo sloupce druhé matice.

Řešení.

S rozepsáním pomocí lineárních kombinací vektorů tvořených sloupci matice A dostáváme

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Odsud dostáváme

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 13 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Jinou metodou, s podrobným rozepsáním pomocí skalárního součinu řádků první matice a sloupců druhé matice dostáváme

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\times 2 - 2\times(-1) + 3\times 0 & 1\times(-2) - 2\times 2 + 3\times 1 & 1\times 2 - 2\times(-1) + 3\times 3 \\ 0\times 2 + 1\times(-1) + 0\times 0 & 0\times(-2) + 1\times 2 + 0\times 1 & 0\times 2 + 1\times(-1) + 0\times 3 \\ 1\times 2 + 2\times(-1) - 2\times 0 & 1\times(-2) + 2\times 2 - 2\times 1 & 1\times 2 + 2\times(-1) - 2\times 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & -3 & 13 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Poté již stručněji (rozepište si sami)

$$
BA = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -6 \end{pmatrix} \quad BC = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 \\ -1 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & 12 \end{pmatrix} \quad CB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}.
$$

V případě součinů s diagonální maticí se diagonálními prvky násobí odpovídající řádky nebo sloupce matice, podle toho, v jakém pořadí součin uvažujeme.

Soustava rovnic jako násobení matic

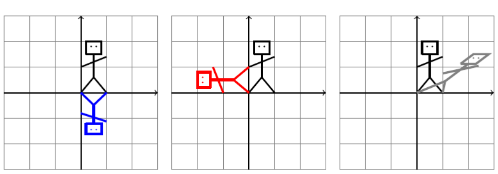
Zapište soustavu rovnic pomocí maticového násobení

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 12 \\
2x_1 + x_2 + x_3 &= 21 \\
-x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Řešení.

$$
\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Timmyho transformace



Figurka na obrázku je Timmy ve třech situacích. Jednou se pozoruje svůj obraz ve vodě, jednou spadl na záda, a jednou vrhá stín. Vyjádřete pomocí matice transformaci, která vzor (černá malůvka) převádí na obraz (barevná malůvka).

Poznámka: Stačí si všímat, kam se zobrazují jednotkové vektory ve směru os, tj. kam se zobrazí Timmiho nakročená noha a Timyho ruka, která je natažená dozadu. Případné neceločíselné složky matice jenom odhadněte. *Podle LAFF Linear Algebra - Foundations to Frontiers (www.ulaff.net)*

Řešení.

Nakročená noha je v bodě $(1,0)$ a tento bod se transformuje sám na sebe pro krajní obrázky a na bod $(0,1)$ pro prostřední obrázek. Tím je dán první sloupec matice zobrazení. Ruka natažená dozadu je v bodě $(0,1)$ a u modrého Timmyho se transformuje (odhadem) na $(0,-0.8)$, u červeného Timmyho na $(-1,0)$ a u šedého Timmyho (odhadem) na $(1,0.8)$. Matice jsou postupně

$$M_{\text{modrá}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{pmatrix}, \quad M_{\text{červená}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{\text{šedá}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Matice rotace

Matice rotace o úhel θ v kladném smyslu je

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Násobením ověřte, že matice otočení o úhel $-\theta$ je k této matici inverzní.

Návod: Funkce kosinus je sudá funkce a funkce sinus je lichá funkce. Proto platí

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \text{a} \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta.$$

Matice rotace je důležitá v aplikacích zabývajících se deformacemi, protože umožní odfiltrovat tu část změny polohy referenčních bodů, která je způsobena rotací a nepřispívá tedy ke změně tvaru tělesa.

Řešení.

Při zkratce $S = \sin\theta$ a $C = \cos\theta$ platí

$$R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix}$$

a potom

$$R_\theta R_{-\theta} = \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2+S^2 & CS-SC \\ SC-CS & S^2+C^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde jsme využili identitu

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Matice posunutí

Transformace pomocí násobení matic zachovává počátek a nemůže proto charakterizovat například posunutí roviny. Pokud chceme mít pomocí maticového násobení realizováno i posunutí, musíme zavést homogenní souřadnice a ztotožnit bod (x,y) s vektorem $(x,y,1)^T$. Ukažte, že matice

$$P_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice posunutí o a doprava a b nahoru. Odhadněte, jak bude vypadat matice popisující opačnou transformaci a pro jedno nějaké pořadí součinu ověřte, že součin těchto matic je jednotková matice.

Řešení.

Platí
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+a\\ y+b\\ 1\end{pmatrix}$$
a vidíme, že k souřadnici x se přičítá a a k souřadnici y se přičítá b. Inverzní zobrazení bude posunutí o a doleva a o b dolů, tj.
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -a\\ 0 & 1 & -b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Přímým výpočtem vidíme, že platí
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -a\\ 0 & 1 & -b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Matice, zachovávající význačné směry

Dřevo má tři výrazné směry a pokud máme možnost zvolit souřadnou soustavu tak, aby tyto směry byly dány vektory $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$ a $(0,0,1)^T$, formulace fyzikálních zákonů se zjednoduší. Nyní si ukážeme proč. Najděte

1. nejobecnější matici 3×3, která zachovává směr vektoru $(1,0,0)^T$,
2. nejobecnější symetrickou matici 3×3, která zachovává směr vektoru $(1,0,0)^T$,
3. nejobecnější symetrickou matici 3×3, která zachovává směr vektorů $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$.

V tomto příkladě uvidíme, že matice zachovávající směr os souřadnic jsou v určitém smyslu pěkné.

Řešení.

ad 1.
$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ d\\ g\end{pmatrix}$$
a vektory $(1,0,0)^T$ a $(a,d,g)^T$ musí mít stejný směr. Proto $d=g=0$ a nejobecnější matice s danou vlastností je matice, která ve druhém a třetím řádku začíná nulou.
$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & e & f\\ 0 & h & i\end{pmatrix}$$

ad 2. Jako minulý případ, ale aby byla matice symetrická, musí být také $b=c=0$, a $h=f$ tj.
$$\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & e & f\\ 0 & f & i\end{pmatrix}.$$

ad 3. Jako minulý případ, ale ještě se musí zachovávat směry vektorů $(0,1,0)^T$ a $(0,0,1)^T$. Platí
$$\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & e & f\\ 0 & f & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ e\\ f\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & e & f\\ 0 & f & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ f\\ i\end{pmatrix}$$

a aby vzor a obraz měly stejný směr, musí být $f = 0$. Nejobecnější symetrická matice, která zachovává směr všech tří základních bázových vektorů je matice, která má mimo hlavní diagonálu nuly.

Matice derivování

Ukažte, že matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ je matice derivování polynomů stupně nejvýše 2, pokud polynom $ax^2 + bx + c$ ztotožníme s vektorem $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Vysvětlete, jak bychom interpretovali matici A^2 a A^3 a tyto matice vypočtěte.

Návod: je možné ukázat buď pro obecný polynom $ax^2 + bx + c$, nebo samostatně pro polynomy x^2, x a 1 a poté si všimnout, že ostatní polynomy můžeme dostat lineárními kombinacemi a maticová násobení tyto l ineární kombinace nepokazí díky tomu, že je distributivní a komutuje při násobení s konstantou. V tomto příkladě mimo jiné vidíme, že mocnina nenulové matice může být nula. To je efekt, který nemá obdobu u násobení reálných čísel.

Řešení. Polynom x^2 má derivaci $2x$, tj. v označení pomocí vektorů se musí vektor $(1, 0, 0)^T$ zobrazit na $(0, 2, 0)^T$. Toto snadno ukážeme, že platí, protože se vlastně jedná o první sloupec matice A. Podobně, polynom x má derivaci 1 a polynom 1 má derivaci 0, tj. v označení pomocí vektorů se musí vektory $(0, 1, 0)^T$ a $(0, 0, 1)^T$ zobrazit na $(0, 0, 1)^T$ a $(0, 0, 0)^T$. Opět vidíme snadno, že pro naši matici A platí (dostáváme vlastně druhý a třetí sloupec matice A).

Protože libovolný polynom druhého stupně dostaneme pomocí lineárních kombinací výše uvedených vektorů a protože tyto lineární kombinace zůstanou při maticovém násobení zachovány, je při výše definovaném zobrazení obrazem libovolného polynomu druhého stupně jeho derivace.

Pro obecný polynom $ax^2 + bx + c$ s derivací $2ax + b$ vidíme, že obrazem vektoru $(a, b, c)^T$ musí být $(0, 2a, b)^T$, což matice A opět (po krátkém výpočtu) splňuje.

Matice A^2 je druhá derivace a A^3 třetí derivace a mají tvar

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice projekce

Matice $P = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix}$ reprezentuje kolmou projekci na přímku, která jde počátkem soustavy souřadnic a svírá s kladnou částí osy x úhel α.

1. Ukažte, že platí $P^2 = P$.
2. Ukažte, (nemusíte výpočtem, například graficky, nebo využitím toho, že každý bod přímky se zobrazí sám na sebe) že dva různé body se projekcí mohou zobrazit na stejný bod a proto není naděje na to mít inverzní zobrazení. Proto neexistuje inverzní matice.

Řešení.

Pro $C = \cos\alpha$ a $S = \sin\alpha$ dostáváme

$$P^2 = \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^4 + C^2S^2 & C^3S + CS^3 \\ C^3S + CS^3 & C^2S^2 + S^4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} C^2(C^2 + S^2) & CS(C^2 + S^2) \\ CS(C^2 + S^2) & S^2(C^2 + S^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix} = P$$

Evidentně jakýkoliv bod mimo přímku projekce a jeho obraz jsou dva různé body, které mají stejný obraz. Proto nemůže existovat inverzní zobrazení.

Pro determinant platí

$$|P| = \begin{vmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{vmatrix} = C^2S^2 - (CS)(CS) = C^2S^2 - C^2S^2 = 0$$

a tento výpočet potvrzuje, že neexistuje inverzní matice.