Diferenciální rovnice

Umění najít řešení diferenciální rovnice je sympatické a naučíme se v úvodním příkladě. Není to však nic proti umění sestavit model (naučili jsme se již ve druhém týdnu a připomeneme si v následujícím příkladě s tloušťkou ledu), umění posoudit jednoznačnost řešení (většina modelů se řeší numericky a musíme být přesvědčeni o smysluplnosti takové činnosti) a stabilitu řešení (řešení, která nejsou stabilní, jsou sice v souladu s přírodními zákony, ale pravděpodobnost jejich spontánního výskytu je nulová). Jednoznačnost a zjednodušenou verzi stability řešení (stabilita konstantních řešení) jsme viděli na přednášce a připomeneme v dalších příkladech.

Řešení ODE a IVP

1. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^2$
2. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = te^y$
3. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{y}$
4. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$
5. $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = kr^3, \quad r(0) = r_0 > 0$
6. $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2, \quad m(0) = 0$
7. $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2, \quad m(0) = -2$

Řešení.

1. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x \cdot y^2$
   - Konstantní řešení jsou řešení rovnice
     $$y^2 = 0,$$
     tj. je jediné konstantní řešení
     $$y = 0.$$
   - Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci
     $$y^{-2}\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x$$
     a integrováním
     $$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C.$$
2. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t \cdot e^y$
   - Konstantní řešení jsou řešení rovnice
     $$e^y = 0.$$
     Protože tato rovnice nemá řešení, zadaná diferenciální rovnice nemá konstantní řešení.
   - Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci
     $$e^{-y}\mathrm{d}y = t\mathrm{d}t$$
     a integrováním
     $$-e^{-y} = \frac{1}{2}t^2 + C.$$

3. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x \cdot \sqrt{y}$
   - Konstantní řešení jsou řešení rovnice
     $$\sqrt{y} = 0,$$
     tj. jediné řešení
     $$y = 0.$$
   - Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci
     $$\frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x$$
     a integrováním
     $$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + C.$$
4. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$
   - Konstantní řešení
     $$y = 0$$
     (viz předchozí příklad) nesplňuje počáteční podmínku a proto jej nemusíme uvažovat
   - Obecné řešení
     $$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$
     dává po dosazení $x = 0$ a $y = 1$ rovnici
     $$2\sqrt{1} = 0 + C.$$
     Odsud dostáváme $C = 2$ a řešení zadané počáteční úlohy je
     $$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 2.$$
5. $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = k \cdot r^3, \quad r(0) = r_0 > 0$
   - Konstantní řešení jsou řešení rovnice
     $$r^3 = 0,$$
     tj. jediné konstantní řešení je
     $$r = 0$$
     a toto řešení nesplňuje počáteční podmínku.
   - Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci
     $$r^{-3}\mathrm{d}r = k\mathrm{d}t$$
     a integrováním
     $$-\frac{1}{2}r^{-2} = kt + C.$$
     Dosazením počáteční podmínky $t = 0$, $r = r_0$ dostáváme
     $$-\frac{1}{2}r_0^{-2} = C.$$
     Tím je dána konstanta C a po použití této konstanty v obecném řešení dostáváme řešení počáteční úlohy ve tvaru
     $$-\frac{1}{2}r^{-2} = kt - \frac{1}{2}r_0^{-2}.$$
6. $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2$, $m(0) = 0$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice
$$m + 2 = 0,$$
tj.
$$m = -2$$
a toto řešení nesplňuje počáteční podmínku.
- Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci
$$\frac{1}{m+2}\mathrm{d}m = dt$$
a integrováním
$$\ln|m+2| = t + C.$$
Po dosazení počáteční podmínky $t = m = 0$ dostáváme
$$C = \ln 2$$
a počáteční úloha má řešení
$$\ln(m+2) = t + \ln(2).$$
(Vzhledem k počáteční podmínce je m kladné a nemusíme psát absolutní hodnotu.)

7. $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2$, $m(0) = -2$
- Konstantní řešení jsou řešení rovnice
$$m + 2 = 0,$$
tj.
$$m = -2.$$
Toto řešení splňuje počáteční podmínku.
- Pravá strana má ohraničenou (dokonce konstantní) derivaci podle m. Proto je řešení každé počáteční úlohy určeno jednoznačně. Řešení z předchozího bodu je jediné a další nemusíme hledat.

Tloušťka ledu

Takzvaný Stefanův zákon (J. Stefan, "Uber die Theorie der Eisbildung, insbesondere "uber die Eisbildung im Polarmeere, 1891) vyjadřuje že tloušťka ledu na hladině moře roste ve stabilních podmínkách rychlostí nepřímo úměrnou této tloušťce. Zapište tento fakt pomocí vhodného matematického modelu a najděte řešení vzniklé diferenciální rovnice.

Řešení.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \frac{k}{h} \\
h\,\mathrm{d}h &= k\,\mathrm{d}t \\
\int h\,\mathrm{d}h &= \int k\,\mathrm{d}t \\
\frac{h^2}{2} &= kt + C
\end{aligned}$$

Model vypouštění nádrže

Z fyziky je známo, že rychlost s jakou vytéká tekutina otvorem u dna nádoby je úměrná odmocnině výšky hladiny (protože se mění potenciální energie úměrná výšce na kinetickou energii úměrnou druhé mocnině rychlosti). Proto je i rychlost s jakou se zmenšuje objem vody v nádrži úměrná odmocnině výšky hladiny.

Ukažte, že matematickým popisem procesu je diferenciální rovnice. Napište rovnici pro výšku hladiny vody v nádrži jako funkci času. Uvažujte tři případy: nádrž *cylindrického tvaru* (válec postavený na podstavu), nádrž ve tvaru *kvádru* a nádrž ve tvaru *kužele* otočeného vrcholem dolů (trychtýř).

V tomto příkladě vystupuje derivace jak rychlost, ale po přepisu zadání do modelu máme v rovnici dvě různé veličiny, které se mění: objem vody a výšku hladiny. Musíme ještě najít a použít vztah mezi rychlostmi změn těchto veličin. Fyzikální zákon je formulován pro derivaci objemu a nás zajímá derivace výšky.

Řešení.

Buď V objem vody a h výška hladiny od dna. Podle zadání ve všech případech platí

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -k_1\sqrt{h}$$

a musíme derivaci $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ vyjádřit pomocí $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$.

Pro cylindr, kvádr nebo jakoukoliv nádrž se svislými stěnami je objem úměrný výšce hladiny, $V = k_2h$, a proto $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = k_2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$. Odsud

$$k_2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -k_1\sqrt{h},$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{k_1}{k_2}\sqrt{h}$$

a pro $k = \frac{k_1}{k_2}$ má model tvar

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{h}.$$

Pro kužel platí díky konstantnímu úhlu u vrcholu vztah $V = k_3h^3$ (díky podobnosti je objem přímo úměrný třetí mocnině libovolného délkového parametru) a proto $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = k_3 \times 3h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$. Odsud

$$3k_3h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -k_1\sqrt{h},$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{k_1}{3k_3}h^{-3/2}$$

a po přeznačení konstanty má model pro kuželovou nádrž tvar

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -kh^{-3/2}.$$

Problematika jednoznačnosti v modelu vypouštění nádrže

Dříve jsme odvodili rovnici

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{h}$$

popisující úbytek hladiny vody v nádrži tvaru kvádru, ze které vypouštíme vodu.

1. Zkontrolujte, že pro $h > 0$ má každá počáteční úloha jediné řešení. Interpretujte tento výsledek prakticky.
2. Pro $h = 0$ by řešení nemuselo být určeno jednoznačně. A opravdu není. Řešením je například $h(t) = 0$ nebo
$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}k^2t^2 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0. \end{cases}$$
Zkontrolujte dosazením (pozor: pro $t < 0$ platí $\sqrt{t^2} = |t| = -t$) a rozmyslete, jestli nejednoznačnost je jenom matematický trik, nebo jestli má fyzikální interpretaci.

Řešení.

Ad 1: Nabídneme dvě varianty, pro argumentaci je možno použít kteroukoliv z nich.

- *Podle obecné věty o jednoznačnosti:* Stačí ověřit, že pravá strana má ohraničenou parciální derivaci podle h. Protože platí
$$\frac{\partial}{\partial h}(k\sqrt{h}) = k\frac{1}{2}h^{-1/2} = \frac{k}{2\sqrt{h}}$$
a tato derivace je definovaná a ohraničená v nějakém okolí libovolného bodu splňujícího $h > 0$. Podle věty o existenci a jednoznačnosti řešení obecné diferenciální rovnice má počáteční úloha právě jedno řešení.
- *Podle věty o jednoznačnosti pro rovnici se separovanými proměnnými:* Stačí ověřit, že část závislá na h je nenulová. Toto jistě platí, protože pro $h > 0$ je $\sqrt{h} \neq 0$.

Pokud je tedy v nádrži nějaká voda, je jednoznačně dáno, jak bude vytékat a je možné vypočítat, jaká bude v libovolném okamžiku hladina.

Ad 2: Pro $h = \frac{1}{4}k^2t^2$ a $t < 0$ dostáváme
$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4}k^2 \cdot 2t = \frac{1}{2}k^2t$$
$$-k\sqrt{h} = -k\sqrt{\frac{1}{4}k^2t^2} = -k\frac{1}{2}|k| \cdot |t| = -k\frac{1}{2}k(-t) = \frac{1}{2}k^2t$$
a obě strany rovnice jsou stejné. Pro $h = 0$ je dosazení triviální.

Je-li $h(t_0) = 0$, může to být proto, že voda v čase t_0 právě vytekla, nebo proto, že vytekla před hodinou nebo proto, že v nádrži nikdy voda nebyla. Proto je nejednoznačnost přirozená. Například $h(t) = 0$ je řešení odpovídající tomu, že voda v nádrži nikdy nebyla. Funkce $h(t) = \frac{1}{4}k^2t^2$ pro $t < 0$ odpovídá tomu, že pro $t < 0$ v nádrži voda byla a vytekla v čase $t = 0$.

Stavebniny vedle čebínského nádraží: model

Hromada sypkého materiálu má tvar kužele. Úhel u vrcholu je konstantní, daný mechanickými vlastnostmi materiálu a je nezávislý na objemu. Předpokládejme, že personál stavebnin přisypává na hromadu materiál konstantní rychlostí (v jednotkách objemu za jednotku času). Tato hromada je však v poměrně otevřené krajině a vítr rozfoukává materiál po okolí. Je rozumné předpokládat, že rozfoukávání (opět v jednotkách objemu za jednotku času) se děje rychlostí úměrnou povrchu návětrné strany pláště. Vyjádřete proces kvantitativně pomocí derivací. Napište rovnici pro derivaci objemu hromady podle času.

Toto je podobný model jako model vypouštění nádrže, ale kratší. Opět máme po přepisu zadání do matematického modelu dvě veličiny měnící se s časem v jedné rovnici. Derivace objemu, která nás zajímá, již v rovnici přítomna naštěstí je. Stačí vyjádřit obsah pomocí objemu, nejlépe pomocí rozměrové analýzy.

Řešení.

Rychlost s jakou se mění objem je $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$, rychlost přisypávání označme R, povrch návětrné strany S. Podle zadání platí

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = R - k_0 S.$$

Protože kužel má stále stejný tvar, objem jednoznačně determinuje rozměry, povrch kužele, nebo i povrch poloviny pláště, tj. povrch návětrné strany. Z rozměrové analýzy na základě Buckinghamova Pi-teorému z přednášky je zřejmé, že musí platit úměrnost mezi takovými mocninami těchto veličin, pro které jednotky "pasují", Existuje tedy konstanta taková, že

$$S = k_1 V^{\frac{2}{3}}.$$

Spojením těchto dvou vztahů dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = R - kV^{\frac{2}{3}},$$

kde r a $k = k_0 k_1$ jsou konstanty.

Stavebniny vedle čebínského nádraží: stabilita řešení

Hromada sypkého materiálu má tvar kužele. Úhel u vrcholu je konstantní, daný mechanickými vlastnostmi materiálu a je nezávislý na objemu. V předchozím příkladě jsme sestavili diferenciální rovnici popisující růst hromady ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = R - kV^{\frac{2}{3}},$$

kde R je rychlost přisypávání a k konstanta.

1. Existuje konstantní řešení? Pokud ano, je stabilní nebo nestabilní? Zdůvodněte.
2. Může hromada skončit i při neustálém přisypávání celá rozfoukaná?
3. Mohou pracovníci navršit hromadu do libovolné výšky anebo pro velkou hromadu je již rozfoukávání rychlejší než přisypávání?

Řešení.

Označme $f(V) = R - kV^{\frac{2}{3}}$. Konstantní řešení je řešením rovnice $f(V) = 0$, tj.

$$R - kV^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Odsud

$$V_0 = \left(\frac{R}{k}\right)^{3/2}.$$

Protože f klesá v bodě V_0, je toto řešení stabilní.

Protože $f(0) > 0$, malá hromada vždy roste a proto nemůže skončit celá rozfoukaná. Pro malý objem je přisypávání intenzivnější než rozfoukávání.

Protože f je pro velké V záporná, pro velkou hromadu objem ubývá (více se rozfouká než přisype) a hromadu není možné navršit libovolně velkou.