Integrály II

Výpočet integrálu substitucí

Najděte následující integrály integrováním substituční metodou.

1. $\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$
2. $\int e^{-ax}\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$
4. $\int \sin x \cos^5 x\mathrm{d}x$
5. $\int \cos x\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x$

Řešení.

V integrované funkci se snažíme "rozšifrovat" součin složené funkce a derivace vnitřní složky. Pokud se to podaří, dáváme substituci takovou, že vnitřní složka složené funkce bude novou proměnnou. V prvním případě je složenou funkcí exponenciální funkce, která má vnitřní složku x^2. Derivace funkce x^2 je $2x$ a toto hledáme v součinu se složenou funkcí. Část s proměnnou x vidíme na začátku integrované funkce. Dvojku ve funkci nemáme, ale to je naštěstí jenom multiplikativní konstanta s takovou konstantou si dokážeme poradit. Viz níže.

1. Integrál vypočteme substitucí
$$x^2 = t,$$
odkud plyne
$$2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$
a
$$x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t.$$
S touto substitucí dostáváme
$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^t\mathrm{d}t.$$
Nyní vypočítáme integrál v proměnné t a odsud
$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$
2. Integrál vypočteme substitucí
$$-ax = t,$$
odkud plyne
$$-a\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$
a
$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\mathrm{d}t.$$

S touto substitucí dostáváme

$$\int e^{-ax} \mathrm{d}x = -\frac{1}{a} \int e^t \mathrm{d}t.$$

Nyní vypočítáme integrál v proměnné t a odsud

$$\int e^{-ax} \mathrm{d}x = -\frac{1}{a} e^t = -\frac{1}{a} e^{-ax} + C.$$

3. Integrál vypočteme substitucí

$$x^2 + 1 = t,$$

odkud plyne

$$2x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

a

$$x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \mathrm{d}t.$$

S touto substitucí dostáváme

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \mathrm{d}t.$$

Nyní vypočítáme integrál v proměnné t a odsud

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln |t| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

4. Integrál vypočteme substitucí

$$\cos x = t,$$

odkud plyne

$$-\sin x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

a

$$\sin x \, \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t.$$

S touto substitucí dostáváme

$$\int \sin x \cos^5 x \, \mathrm{d}x = -\int t^5 \mathrm{d}t.$$

Nyní vypočítáme integrál v proměnné t a odsud

$$\int \sin x \cos^5 x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{6} t^6 = -\frac{1}{6} \cos^6 x + C.$$

5. Integrál vypočteme substitucí

$$\sin x = t,$$

odkud plyne

$$\cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t.$$

S touto substitucí dostáváme

$$\int \cos x \sqrt{\sin x} \, \mathrm{d}x = \int \sqrt{t} \, \mathrm{d}t.$$

Nyní vypočítáme integrál v proměnné t a odsud

$$\int \cos x \sqrt{\sin x} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3} t^{3/2} = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

Kontrola zde.

Střední hodnota funkce

Určete střední hodnotu funkce na zadaném intervalu.

1. funkce $\sqrt{x}$ na intervalu $[1, 4]$
2. funkce $\sin x$ na intervalu $[0, \pi]$
3. funkce $\sin x$ na intervalu $[0, 2\pi]$
4. funkce ax^2 na intervalu $[0, 1]$

V posledním příkladě určete hodnotu konstanty a tak, aby střední hodnota byla rovna jedné.

Vedení tepla stěnou, lineární materiálové vztahy

Tok tepla v jedné dimenzi je dán Fourierovým zákonem

$$Q = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}.$$

Pro ustálené proudění je Q konstantní. Pro homogenní materiál s lineární odezvou je výše uvedený vztah přesně lineární, tj. k je konstanta. Určete tok tepla stěnou šířky d oddělující prostory o teplotě T_1 a T_2.

Řešení.

Vztah

$$Q = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

udává derivaci teploty podle polohy ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{Q}{k}$$

a integrací na intervalu $x \in [0, d]$ dostáváme

$$T(d) - T(0) = \int_0^d -\frac{Q}{k}\,\mathrm{d}x = -\frac{Q}{k}\int_0^d \mathrm{d}x = -\frac{Q}{k}d.$$

Pro $T(0) = T_1$ a $T(d) = T_2$ dostáváme

$$T_2 - T_1 = -\frac{Q}{k}d$$

a odsud

$$Q = k\frac{T_1 - T_2}{d}$$

Vedení tepla stěnou, nelineární materiálové vztahy

Zopakujte předchozí výpočet pro materiál s nelineární materiálovou odezvou, kdy Fourierův zákon není lineární, tj. k závisí na teplotě. Nejjednodušší zobecnění je případ, kdy $k(T)$ je lineární, tj. platí

$$k(T) = a + bT.$$

Použijte substituční metodu převádějící integrál $\int k(T(x))\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$ na integrál $\int k(T)\,\mathrm{d}T$. Použijte dále skutečnost, že střední hodnota lineární funkce je aritmetickým průměrem hodnot v krajních bodech intervalu.

Na tomto příkladě jsou zajímavé tři věci.

- Odvodíme vzorec používaný při posuzování tepelných ztrát.
- Přirozeně vychází vzorec, který po zavedení střední hodnoty funkce $k(T)$ splývá se vzorcem z předchozího příkladu, odvozeného pro konstantní vodivost.
- Nejzajímavější je fakt, že jsme substituční metodou vypočítali integrál funkce, kterou vlastně vůbec neznáme. Vskutku, neznáme teplotní profil $T(x)$ ve stěně a tím pádem neznáme ani závislost vodivosti $k(T(x))$ na poloze a ani gradient teploty. Přesto se podařilo integrál vypočítat. Teplotní profil se naučíme hledat jako řešení rovnice vedení tepla.

Řešení.

Stejně jako v předchozím příkladě, máme

$$k(T)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -Q$$

a integrací na intervalu $[0, d]$ dostáváme

$$\int_0^d k(T)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -Qd$$

a po substituci a označení $T(0) = T_1$, $T(d) = T_2$

$$\int_{T_1}^{T_2} k(T)\,\mathrm{d}T = -Qd.$$

S využitím střední hodnoty dostáváme

$$(T_2 - T_1)\frac{k(T_1) + k(T_2)}{2} = -Qd$$

a po výpočtu

$$Q = \frac{k(T_1) + k(T_2)}{2}\frac{T_1 - T_2}{d}.$$

Střední hodnota funkce dané tabulkou

Určete střední hodnotu koeficientu tepelné vodivosti λ mědi na teplotním intervalu od 100 do 400 Kelvinů. Porovnejte výsledek s aritmetickým průměrem.

Pro výpočet na intervalu od 100 do 800 Kelvinů bychom museli integrovat na intervalu, na kterém nemáme rovnoměrně rozložené uzlové body. Navrhněte, jak v takovém případě postupovat a jak vypočítat $\int_{100}^{800} \lambda(T)\,\mathrm{d}T$

Table 1: Zdroj: Cengel, Mass and heat transfer.

T/K	$\lambda/(\mathrm{W/(m\,K)})$
100	482
200	413
300	401
400	393
600	379
800	366

Řešení.

Integrál vypočteme lichoběžníkovým pravidlem

$$\int_{100}^{400} \lambda(T)\,\mathrm{d}T \approx \frac{100}{2}(482 + 2\times 413 + 2\times 401 + 393) = 125150$$

Střední hodnota na intervalu $[100, 400]$ je

$$\frac{1}{300}\int_{100}^{400} \lambda(T)\,\mathrm{d}T \approx 417$$

Aritmetický průměr je

$$\frac{482 + 413 + 401 + 393}{4} = 422.$$

Střední hodnota je vlastně (po dosazení lichoběžníkového pravidla)

$$\frac{482 + 2\times 413 + 2\times 401 + 393}{6}$$

a jedná se tedy o vážený průměr, kdy vnitřní body jsou započteny dvojnásobnou vahou.

Integrál na intervalu $[100, 800]$ vypočteme díky aditivitě vzhledem k integračnímu oboru

$$\int_{100}^{800} \lambda(T)\,\mathrm{d}T = \int_{100}^{400} \lambda(T)\,\mathrm{d}T + \int_{400}^{800} \lambda(T)\,\mathrm{d}T$$

a pro každý integrál máme data v ekvidistantních krocích a můžeme použít přímo lichoběžníkové pravidlo.

Růst populace a přežívání jedinců

Populace živočišného druhu činí 5600 jedinců a tato populace roste rychlostí

$$R(t) = 720e^{0.1t}$$

jedinců za rok. (V tomto čísle je zahrnuta přirozená natalita, mortalita a povolený lov.) Vlivem znečištění životního prostředí se však jedinci dožívají kratšího věku, než je zahrnuto v popsaném modelu. Zlomek populace, který přežije časový interval délky t, je

$$S(t) = e^{-0.2t}.$$

Odhadněte počet živočichů za 10 let a odhadněte, jaký by tento počet byl, kdyby k žádnému znečištění nedocházelo, tj. kdyby bylo $S(t) = 1$.

Napište jenom příslušné integrály a okomentujte, jakými metodami bychom je počítali. Vlastní výpočet provádět nemusíte.

(Podle J. Stewart, T. Day: Biocalculus, Calculus for Life Sciences.)

Řešení.

Nechť výchozí stav je rok $t = 0$.

Bez znečištění: Pokud je $N(t)$ počet jedinců po roce t, platí

$$N(10) = N(0) + \int_0^{10} R(t)\,\mathrm{d}t = 5600 + \int_0^{10} 720e^{0.1t}\,\mathrm{d}t = 5600 + \left[7200e^{0.1t}\right]_0^{10} \approx 18000,$$

kde integrál se dá vypočítat přímou integrací pomocí vzorce.

Se znečištěním: Jedinci, kteří jsou v populaci na začátku, musí přežít 10 let, to znamená, že se jejich počet sníží na $S(10)$-násobek. Jedinci, kteří se narodí v roce t musí přežít $10-t$ let a to znamená, že jejich počet se sníží na $S(10-t)$-násobek. Toto snížení musíme započítat do předchozího modelu bez znečištění a dostaneme

$$\begin{aligned} N(10) = N(0)S(10) + \int_0^{10} R(t)S(10-t)\,\mathrm{d}t = \\ = 5600e^{-2} + \int_0^{10} 720e^{0.1t}e^{-0.2(10-t)}\,\mathrm{d}t \\ = 5600e^{-2} + 720e^{-2}\int_0^{10} e^{0.3t}\,\mathrm{d}t = \cdots = 7000, \end{aligned}$$

kde i tento integrál se dá vypočítat přímou integrací pomocí vzorce.

Rodičovské stromy

Při obnově lesů je nutné velké množství sadebního materiálu. Kromě školek hrají při obnově lesa důležitou roli rodičovské stromy. Plošná hustota semen (například v počtu semen na metr čtvereční) ve vzdálenosti r od stromu je dána funkcí

$$D(r) = D_0 e^{-r^2/a^2}.$$

Pro vhodnou volbu jednotek dosáhneme toho, že platí $a = 1$. Pracujme proto s funkcí

$$D(r) = D_0 e^{-r^2}.$$

Určete množství semen uvnitř kruhu o poloměru R.

Napište jenom příslušný integrál a okomentujte, jakou metodou bychom ho počítali. Vlastní výpočet provádět nemusíte.

(Volně přeformulováno podle L. Edestein–Keshet: Differential calculus for the life sciences. Příklad je použitelný pro stromy s velkými semeny, například dub. Pro jiné stromy musí semena sbírat stromolezci.)

Řešení. Množství semen na metr čtvereční závisí na vzdálenosti od stromu, je to tedy podobná úloha jako úloha s prouděním tekutiny potrubím v přednášce. Postupujeme analogicky, jenom místo rychlosti tekutiny máme hustotu semen. Množství je součin hustoty a obsahu, $N = S \cdot D$. Protože D není na celém obsahu konstantní, rozdělíme na části, kde konstantní je, a příspěvky sečteme, tj.

$$N = \sum_{kruh} D \cdot \Delta S.$$

Protože D je funkce r, potřebujeme sčítat (integrovat) přes r. Proto kruh dělíme na mezikruží a přes tato mezikruží sčítáme, tj.

$$N = \sum_{kruh} D \frac{\Delta S}{\Delta r} \Delta r.$$

Limitním přechodem uděláme skok v součtu nekonečně malý a součet přejde na integrál, podíl změn přejde na derivaci, tj. dostaneme

$$N = \int_{kruh} D \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r.$$

Obsah $S = \pi r^2$ roste s poloměrem, $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\pi r$. Po dosazení této derivace a po dosazení za D a vyjádření toho, co znamená integrál přes kruh o poloměru R získáme integrál

$$N = \int_0^R D_0 e^{-r^2} 2\pi r\,\mathrm{d}r,$$

který můžeme vypočítat pomocí substituce $-r^2 = t$.