Integrály I

- Naučíme se hledat neurčitý integrál funkce. Stačí mít po ruce vzorce.
- Naučíme se hledat určitý integrál funkce.
- Procvičíme si interpretaci integrálu v kontextu změny veličiny, která se mění nekonstantní rychlostí.

Výpočet integrálu

Najděte následující integrály.

1. $\int x^2 + 2x \mathrm{d}x$
2. $\int \sqrt{x}\Big(x + \sqrt{x}\Big)\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\mathrm{d}x$
4. $\int \frac{x^2-1}{x}\mathrm{d}x$
5. $\int e^x + e^{2x}\mathrm{d}x$
6. $\int \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x$
7. $\int \frac{1}{4x^2}\mathrm{d}x$
8. $\int \frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x$
9. $\int \frac{1}{1+4x^2}\mathrm{d}x$
10. $\int \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^6}\,\mathrm{d}r$
11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x$
12. $\int_0^1 (x-1)^3 \mathrm{d}x$
13. $\int_{-1}^1 3x^2 + x^5 \mathrm{d}x$
14. $\int_0^{10} e^{-0.1t}\,\mathrm{d}t$
15. $\int_{-a}^{a} u^3\,\mathrm{d}u$

Řešení.

Používáme vzorce $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$, $\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax} + c$ a dále linearitu (integrál zachovává součet a konstantní násobek)

1. $\int x^2 + 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + c$
2. $\int \sqrt{x}(x + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int x\sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}} + x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^2 + c$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$
4. $\int \frac{x^2-1}{x}\,\mathrm{d}x = \int x - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + C$
5. $\int e^x + e^{2x}\,\mathrm{d}x = e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + c$
6. $\int \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C$
7. $\int \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(-1)x^{-1} = -\frac{1}{4x} + c$
8. $\int \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$
9. $\int \frac{1}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + C$
10. $\int \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^6}\,\mathrm{d}r = \int r^{-2} - r^{-6}\,\mathrm{d}r = (-1)r^{-1} + \frac{1}{5}r^{-5} = -\frac{1}{r} + \frac{1}{5r^5} + c$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$
12. $\int_0^1 (x-1)^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}(x-1)^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}(1-1)^4 - \frac{1}{4}(0-1)^4 = -\frac{1}{4}$
13. $\int_{-1}^1 3x^2 + x^5\,\mathrm{d}x = \left[x^3 + \frac{1}{6}x^6\right]_{-1}^1 = \left(1^3 + \frac{1}{6}1^6\right) - \left((-1)^3 + \frac{1}{6}(-1)^6\right) = 2$
14. $\int_0^{10} e^{-0.1t}\,\mathrm{d}t = \left[-10e^{-0.1t}\right]_0^{10} = -10e^{-0.1\times 10} - \left(-10e^{-0.1\times 0}\right) = -10e^{-1} + 10$
15. $\int_{-a}^a u^3\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{4}u^4\right]_{-a}^a = \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{4}(-a)^4 = 0$

Vytékání oleje

Najděte slovní interpretaci integrálu

$$\int_0^{10} r(t)\mathrm{d}t,$$

kde $r(t)$ je rychlost s jakou vytéká olej z děravé nádrže (v litrech za hodinu) a t je čas v hodinách. Vypočtěte integrál pro $r(t) = 200 - 4t$.

Toto a další příklady jsou klasické aplikace integrálu, kdy integrálem rychlosti, s jakou se mění nějaká veličina, je změna této veličiny.

Řešení. Integrál udává objem oleje, který vyteče za prvních 10 hodin. Pro zadanou funkci dostáváme

$$\int_0^{10} r(t)\mathrm{d}t = \int_0^{10} (200-4t)\mathrm{d}t = \left[200t - 2t^2\right]_0^{10} = 2000 - 200 - (0-0) = 1800.$$

Za 10 hodin vyteče 1800 litrů oleje.

Populace včel

Populace včel o počáteční velikosti 100 včel se rozmnožuje rychlostí $r(t)$. Najděte slovní interpretaci výrazů

$$\int_0^{15} r(t)\mathrm{d}t,$$

a

$$100 + \int_0^{15} r(t)\mathrm{d}t.$$

Řešení. První integrál značí přírůstek populace včel za patnáct jednotek času, druhý integrál značí celkovou velikost populace včel po uplynutí patnácti jednotek času. (Jednotky času nejsou v zadání specifikovány.)

Napouštění nádrže

Chemikálie teče do nádrže rychlostí $180 + 3t$ litrů za minutu, kde $t \in [0, 60]$ je čas v minutách. Určete, kolik chemikálie nateče do nádrže během prvních 20 minut.

(Podle Stewart: Calculus.)

Řešení.

Změna množství v nádrži je integrál rychlosti, tj.

$$\int_0^{20} (180 + 3t)\,\mathrm{d}t = 180 \times 20 + \left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^{20} = 4\,200\,\mathrm{l}.$$

Prasklá kanalizace

Prasklá kanalizace způsobila znečištění jezera v rekreační oblasti. Koncentrace bakterií $C(t)$ (v bakteriích na kubický centimetr, t je čas ve dnech) se po ošetření úniku pro $t \in [0,6]$ vyvíjí rychlostí

$$C'(t) = 10^3(t-7).$$

Jaká je změna koncentrace bakterií mezi čtvrtým a šestým dnem?

(Podle Mardsen, Weinstein: Calculus I.)

Řešení.

Změna koncentrace je integrál z rychlosti s jakou se koncentrace mění, tj.

$$\int_4^6 10^3(t-7)\,\mathrm{d}t = \left[10^3\left(\frac{1}{2}t^2 - 7t\right)\right]_4^6 = -4000$$

a koncentrace poklesne o 4000 jednotek (bakterií na kubický centimetr).

Rychlost učení

Nechť $W(t)$ je počet francouzských slovíček, které se naučíme po t minutách. Typicky může být (pro první dvě hodiny učení)

$$W(0) = 0 \quad \text{a} \quad W'(t) = \frac{4t}{100} - 3\left(\frac{t}{100}\right)^2.$$

Najděte pomocí integrálu funkci $W(t)$.

(Podle Mardsen, Weinstein: Calculus I.)

Řešení. Výsledná funkce integrálem rychlosti učení, tj.

$$W(t) = \int W'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{4t}{100} - 3\left(\frac{t}{100}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{2t^2}{100} - \frac{t^3}{10000} + C,$$

kde C je integrační konstanta. Protože musí platit $W(0) = 0$, je $C = 0$ a proto

$$W(t) = \frac{2t^2}{100} - \frac{t^3}{10000}.$$

Jiné řešení je pomocí určitého integrálu najít změnu a poté přičíst k počáteční hodnotě. Aby nedošlo ke kolizi mezi označením integrační proměnné t a mezi koncem časového intervalu, budeme tento konec časového intervalu označovat T. Tedy platí

$$w(T) = w(0) + \int_0^T w'(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^T \frac{4t}{100} - 3\left(\frac{t}{100}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{2T^2}{100} - \frac{T^3}{10000}.$$

Tedy

$$w(T) = \frac{2T^2}{100} - \frac{T^3}{10000}$$

a po přeznační proměnné máme stejný výsledek jako předešlým postupem.

Určení parametru tak, aby integrál měl zadanou hodnotu

V praktických úlohách je někdy situace, kdy integrujeme funkci s parametrem a hodnotu parametru je nutno doladit tak, aby integrál měl předem stanovenou hodnotu. Určete hodnotu reálného parametru a tak, aby byl integrál

$$\int_0^{10} a\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

roven hodnotě 2019.

Řešení.

$$\int_0^{10} a\sqrt{x} = \left[a\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{10} = \frac{2a}{3}(10)^{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} 2019 &= \frac{2a}{3}(10)^{\frac{3}{2}} \\ a &= \frac{3}{2}2019(10)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Práce na pružině

Síla působící na pružinu je úměrná deformaci pružiny. Natáhneme-li pružinu z rovnovážného stavu o hodnotu x, je nutno působit silou kx, kde k je konstanta (tuhost pružiny). Vypočtěte práci nutnou k natažení pružiny z nedeformovaného stavu o jednotkovou délku a poté o délku l.

Po obecném výpočtu vypočtěte práci pro pružinu o zadané tuhosti k a deformaci Δx. Výpočet proveďte určitým integrálem třikrát, postupně pro jednotku délky centimetr, decimetr a metr. Až po dokončení výpočtu převeďte na joule (newton krát metr).

$$k = 10\,\mathrm{N/cm} = 100\,\mathrm{N/dm} = 1000\,\mathrm{N/m}, \qquad \Delta x = 10\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{dm} = 0.1\,\mathrm{m}$$

Všimněte si, že v každém případě se integruje jiná funkce a v jiných mezích. Protože však všechny výpočty charakterizují stejnou situaci, výsledky jsou po převedení na stejné jednotky stejné, což je očekávané. Změna jednotek je speciální případ substituce, kdy proměnnou podle které integrujeme nahradíme proměnnou jinou. Tuto metodu si pro integrál představíme na přednášce.

Řešení.

Jednotková délka:

$$W = \int_0^1 F\,\mathrm{d}x = \int_0^1 kx\,\mathrm{d}x = \left[k\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}k - 0 = \frac{1}{2}k$$

Délka l:

$$W = \int_0^l F\,\mathrm{d}x = \int_0^l kx\,\mathrm{d}x = \left[k\frac{1}{2}x^2\right]_0^l = \frac{1}{2}kl^2 - 0 = \frac{1}{2}kl^2$$

Výpočet v centimetrech:

$$W = \int_0^{10} 10x\,\mathrm{d}x = \left[5x^2\right]_0^{10} = 5 \times 100 = 500\,\mathrm{Ncm} = 5\,\mathrm{Nm}$$

Výpočet v decimetrech:

$$W = \int_0^1 100x \,\mathrm{d}x = \left[50x^2\right]_0^1 = 50\,\mathrm{Ndm} = 5\,\mathrm{Nm}$$

Výpočet v metrech:

$$W = \int_0^{0.1} 1000x \,\mathrm{d}x = \left[500x^2\right]_0^{0.1} = 500 \times 0.01\,\mathrm{Nm} = 5\,\mathrm{Nm}$$