Výpočet derivací, lineární aproximace

- Naučíme se derivovat součin a podíl funkcí. Jedná se o použití vzorců, nejsou nutné předchozí znalosti, je nutné mít pouze k dispozici vzorce.
- Naučíme se používat vzorec pro lineární aproximaci funkce. Naučíme se nahrazovat komplikované funkční závislosti závislostmi jednoduššími.
- Naučíme se další triky získané díky lineární a polynomiální aproximaci: numerické derivování a numerické řešení rovnic.

Výpočet derivace součinu a podílu

Určete derivace následujících funkcí, kde $a, b, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $f(x) = x \ln x$
2. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$
3. $f(x) = \frac{x}{ax+b}$
4. $f(t) = \frac{t}{t^2+6}$
5. $f(x) = \frac{ax^2}{x^2+1}$
6. $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$
7. $f(x) = \frac{ax}{(x-1)^2}$

Řešení.

1. $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x} = 1 + \ln x$
2. $f'(x) = \sqrt{x^2+a} + x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
3. $f'(x) = \frac{1\cdot(ax+b)-x\cdot a}{(ax+b)^2} = \frac{b}{(ax+b)^2}$
4. $f'(t) = \frac{(t^2+6)-t2t}{(t^2+6)^2} = \frac{6-t^2}{(t^2+6)^2}$
5. $f'(x) = \frac{2ax(x^2+1)-ax^22x}{(x^2+1)^2} = \frac{2ax}{(x^2+1)^2}$
6. $f'(x) = \frac{6x^2(x^2+1)-2x^32x}{(x^2+1)^2}$
7. $f'(x) = \frac{a(x-1)^2-ax2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{a(x-1)-ax2}{(x-1)^3} = \cdots$

Základní lineární aproximace

Najděte lineární aproximace funkcí $\sin x$, $\cos x$ a $(1+x)^n$ v okolí nuly. Tím dokážete platnost následujících přibližných vzorců platných pro x blízko nuly.

$$\sin x \approx x$$
$$\cos x \approx 1$$
$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

První dvě aproximace využijeme později pro odvození tvaru matice malých rotací, což je důležité při studiu deformace materiálů. Poslední můžeme využít například pro to, abychom z relativistického vzorce pro celkovou energii extrahovali část závislou na rychlosti, tj. kinetickou energii (na přednášce).

Řešení.

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

1. $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(x) = (\sin(x))' = \cos x$, $f'(0) = \cos(0) = 1$

$$\sin(x) \approx 0 + 1 \cdot (x - 0) = x$$

2. $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$, $f(0) = \cos 0 = 1$, $f'(x) = (\cos(x))' = -\sin x$, $f'(0) = -\sin(0) = 0$

$$\cos(x) \approx 1 + 0 \cdot (x - 0) = 1$$

3. $f(x) = (1+x)^n$, $x_0 = 0$, $f(0) = (1+0)^n = 1$, $f'(x) = ((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}$, $f'(0) = n(1+0)^{n-1} = n$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n \cdot (x - 0) = 1 + nx$$

Lineární aproximace

Veličina y je funkce proměnné x. Najděte její lineární aproximaci v okolí zadaného bodu.

1. $y = xe^x$ v okolí bodu $x = 0$
2. $y = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ v okolí bodu $x = 0$
3. $y = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ v okolí bodu $x = K$
4. $y = \sqrt{x}$ v okolí bodu $x = 1$
5. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ v okolí bodu $x = 1$

Ve druhém a třetím příkladě aproximujeme funkci modelující růst populace v prostředí s nosnou kapacitou K. Aproximace v okolí bodu $x = 0$ odpovídá velmi malé populaci. Proto se konstanta úměrnosti ze získané lineární aproximace nazývá invazní parametr.

Řešení.

1. $f(x) = xe^x$, $x_0 = 0$, $f(0) = 0e^0 = 0$, $f'(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x$, $f'(0) = e^0 + 0e^0 = e^0 = 1$

$$xe^x \approx 0 + 1 \cdot (x - 0) = x$$

2. $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, $x_0 = 0$, $f(0) = r0\left(1 - \frac{0}{K}\right) = 0$, $f'(x) = \left(rx - r\frac{1}{K}x^2\right)' = r - \frac{2r}{K}x$, $f'(0) = r - \frac{2r}{K} \cdot 0 = r$

$$rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \approx 0 + r(x - 0) = rx$$

3. $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, $x_0 = K$, $f(K) = rK\left(1 - \frac{K}{K}\right) = rK(1 - 1) = 0$, $f'(x) = \left(rx - r\frac{1}{K}x^2\right)' = r - \frac{2r}{K}x$, $f'(K) = r - \frac{2r}{K} \cdot K = r - 2r = -r$

$$rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \approx 0 - r(x - K) = -r(x - K) = r(K - x)$$

Poslední aproximaci je možno přepsat do tvaru

$$rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \approx rK\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

4. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=1$, $f(1)=\sqrt{1}=1$, $f'(x)=\left(x^{\frac12}\right)'=\frac12 x^{-\frac12}$, $f'(1)=\frac12$

$$\sqrt{x}\approx 1+\frac12(x-1)$$

5. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0=1$, $f(1)=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$, $f'(x)=\left(x^{-\frac12}\right)'=-\frac12 x^{-\frac32}$, $f'(1)=-\frac12$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\approx 1-\frac12(x-1)$$

Kinetika chemických reakcích pro malé koncentrace

Rychlost mnoha chemických reakcí je dána vzorcem

$$f(x)=\frac{ax}{b+x},$$

kde x je koncentrace substrátu a a, b jsou parametry (konstanty). Tento vzorec se nazývá kinetika Michaelise a Mentenové. Ukažte, že platí

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{ab}{(b+x)^2}.$$

Použijte tento výpočet k lineární aproximaci funkce

$$f(x)=\frac{ax}{b+x},$$

pro malá x.

Řešení.

Přímým dosazením dostáváme $f(0)=\frac{a0}{b+0}=0$, $f'(0)=\frac{ab}{(b+0)^2}=\frac{ab}{b^2}=\frac{a}{b}$ a odsud

$$\frac{ax}{b+x}\approx 0+\frac{a}{b}(x-0)=\frac{a}{b}x.$$

Lineární aproximace kvalifikovaným odhadem

Pokud je v součinu výraz, který je blízký nule, ovlivní tento výraz výsledný součin více, než zbylé součinitele. Postavíme toto pozorování na solidnější základy.

Ukažte, že pokud platí $f(x)=g(x)h(x)$ a $g(x_0)=0\neq h(x_0)$, má lineární aproximace funkce g tvar

$$g(x)\approx g'(x_0)(x-x_0)$$

a lineární aproximace funkce f tvar

$$f(x)\approx\Big[g'(x_0)(x-x_0)\Big]h(x_0),$$

kde v hranaté závorce je lineární aproximace funkce g a tato aproximace je vynásobena hodnotou funkce h v bodě x_0.

Situace je jednoduchá zejména v případě, kdy funkce g je lineární a je sama svojí lineární aproximací. Ukažte, že s uvedenou výbavou je možno napsat lineární aproximace prvních tří funkcí z příkladu **??** přímo a bez výpočtu. Ukažte, že výpočet není nutný a výsledek se dá kvalifikovaně odhadnout i v předchozím příkladě s kinetikou Michaelise a Mentenové. Pro tyto účely použijte triviální identitu

$$\frac{ax}{b+x} = x \cdot \frac{a}{b+x}.$$

Řešení.

Obecný vzorec je

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Vztah

$$g(x) \approx g'(x_0)(x - x_0)$$

z něj plyne okamžitě použitím funkce g a podmínky $g(x_0) = 0$.

Pro funkci $f(x) = g(x)h(x)$ v našem případě máme

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0)h(x_0) = 0 \cdot h(x_0) = 0 \\ f'(x_0) &= g'(x_0)h(x_0) + g(x_0)h'(x_0) = g'(x_0)h(x_0) + 0 \cdot h'(x_0) = g'(x_0)h(x_0) \end{aligned}$$

a přímým dosazením

$$f(x) \approx 0 + g'(x_0)h(x_0)(x - x_0) = \Big[g'(x_0)(x - x_0)\Big]h(x_0)$$

1. Funkce $f(x) = xe^x$ má v $x = 0$ první součinitel nulový a druhý součinitel nenulový a platí $e^0 = 1$. V okolí $x = 0$ je první součinitel lineární. Proto v okolí $x = 0$ platí

   $$xe^x \approx xe^0 = x \cdot 1 = x.$$

2. Funkce $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ má v $x = 0$ první součinitel rx nulový a druhý součinitel $\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ nenulový a platí $\left(1 - \frac{0}{K}\right) = 1$. V okolí $x = 0$ je první součinitel lineární a v okolí $x = 0$ platí

   $$rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \approx rx\left(1 - \frac{0}{K}\right) = rx.$$

3. Funkce $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ má v bodě $x = K$ první součinitel rx nenulový roven rK a druhý součinitel $\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ nulový. Druhý součinitel je lineární. Proto v okolí $x = K$ platí

   $$rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \approx rK\left(1 - \frac{x}{K}\right) = r(K - x).$$

4. Funkce $f(x) = x\frac{a}{b+x}$ má v bodě $x = 0$ první součinitel x nulový a druhý součinitel $\frac{a}{b+x}$ nenulový a roven $\frac{a}{b}$. První součinitel je lineární. Proto v okolí $x = 0$ platí

   $$x\frac{a}{b+x} \approx x\frac{a}{b}.$$

Numerické derivování a závislost tepelné vodivosti mědi na teplotě

Tabulka udává závislost koeficientu tepelné vodivosti mědi na teplotě, $\lambda = \lambda(T)$. Odhadněte pomocí centrální diference derivaci funkce λ pro $T = 400K$ (cca 127°C). Určete i fyzikální jednotku derivace $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T}$ a slovní interpretaci vypočtené hodnoty.

Poznámka: Teplota v Kelvinech (termodynamická teplota) je teplota ve stupních Celsia posunutá tak, aby teplota $-273{,}15°\mathrm{C}$ *odpovídala* $0\,\mathrm{K}$. *Dílky a tedy i změny teploty jsou na obou stupnicích identické.*

Table 1: Zdroj: Cengel, Mass and heat transfer.

T/K	$\lambda \Big/ \mathrm{W/(m\,K)}$
200	413
400	393
600	379
800	366

Řešení.

Teploty jsou v ekvidistantních krocích po 200 kelvinech. Vezmeme od výchozí hodnoty 400 kelvinů nejbližší nižší (200 K) a nejbližší vyšší (600 K) teplotu, najdeme v tabulce odpovídající koeficienty tepelné vodivosti, rozdílem určíme změnu v tomto koeficientu a podílem přepočteme změnu na jeden Kelvin.

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T}(400) \approx \frac{(379-413)\mathrm{W/(m\,K)}}{2\cdot 200\mathrm{K}} = -0.085\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-2}}$$

Při teplotě $T = 400K$ hodnota koeficientu tepelné vodivosti s rostoucí teplotou klesá. S každým stupněm Celsia (s každým Kelvinem) nad danou teplotu klesne koeficient tepelné vodivosti o $0.085\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$.

Pokusíme se trošku slovně ilustrovat, co nám vlastně vyšlo. Při teplotě 400 K a teplotním gradientu jeden stupeň Celsia na metr délky prochází mědí tepelný výkon 393 wattů na metr čtvereční, tj. za sekundu se plochou metru čtverečního přenese 393 joulů. S každým stupněm Celsia navíc tato hodnota malinko poklesne: o 0.085 joulu. Odsud je patrné, že při změně teploty řádově o desítky stupňů se koeficent změní o malé jednotky procent a v těchto situacích nebude závislost na teplotě významná.

Iterační metoda

Úlohy s tepelnou bilancí (např. osluněná stěna) často vedou na rovnice obsahující čtvrtou mocninu a první mocninu neznámé veličiny. Toto je dáno tím, že vyzařování tepla souvisí podle Stefanova-Bolzmannova zákona se čtvrtou mocninou teploty a přenos tepla prouděním nebo vedením souvisí s první mocninou teploty. Koeficient u první mocniny bývá větší než u čtvrté mocniny, protože konstanta ze Stefanova-Bolzmannova zákona je velmi malá. Typickým představitelem by mohla být rovnice

$$x^4 - 8x + 6 = 0.$$

Napište iterační vzorec pro řešení této rovnice Newtonovou metodou a proveďte několik iterací s vhodnou celočíselnou počáteční aproximací. Poté porovnejte s postupem, kdy v rovnici osamostatníte x z lineární části a z takové rovnice sestavíte iterační vzorec.

Řešení.

Newtonova metoda: Využitím funkčního předpisu $f(x) = x^4 - 8x + 6$ a derivace $f'(x) = 4x^3 - 8$ dostáváme iterační vzorec

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 8x_n + 6}{4x_n^3 - 8},$$

který konverguje velmi rychle.

Iterace	Hodnota
x_0	1.000000000000000

Iterace	Hodnota
x_1	0.750000000000000
x_2	0.800123762376238
x_3	0.801613150991155
x_4	0.801614587354561
x_5	0.801614587355901
x_6	0.801614587355901

Sage.

Ad hoc iterace: Rovnici převedeme na tvar

$$x = \frac{x^4 + 6}{8}$$

a zkusíme iterace

$$x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 6}{8}.$$

Konergenci pozorujeme, ale je pomalá.

Iterace	Hodnota
x_0	1.000000000000000
x_1	0.875000000000000
x_2	0.823272705078125
x_3	0.807422868167514
x_4	0.803126865733812
x_5	0.802005182967586
x_6	0.801715260030858

Sage.