# Matematika - cvičení

Robert Mařík

Datum kompilace: 7. prosince 2022

# Obsah

# Kapitola 1

# Výpočet derivací

- Derivaci budeme chápat jako zobrazení, které funkci přiřadí jinou funkci. Proč je tak nesmírně užitečná zjistíme v následujících týdnech.
- Naučíte se derivovat jednoduché funkce (mocninné funkce, další základní elementární funkce a složené funkce). Nejsou nutné žádné přdchozí znalosti, budete potřebovat pouze vzorce pro derivování a spoustu cviku.
- Naučíte se interpretovat derivaci jako rychlost růstu v různých kontextech, kdy veličina závisí na čase, příapdně na jiné veličině.
- Naučíte se ze známého vzorce mezi dvěma veličinami odvodit vzorec dávající do souvislosti rychlosti změn těchto veličin.

### 1.0.1 Základní vzorce.

1. $(c)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c) = 0$
2. $(x^n)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
3. $(e^x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$
4. $(\ln x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$
6. $(\cos x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$
7. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$

Zde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta a zbytek jsou vzorce, které platí vždy, když je výraz napravo definovaný.

### 1.0.2 Triky, které se často hodí.

1. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$
3. $\frac{1}{x^k} = x^{-k}$
4. $\frac{f(x)}{c} = \frac{1}{c}f(x)$
5. $\frac{c}{f(x)} = cf^{-1}(x)$
6. $a^x = e^{x \ln a}$
7. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
8. $\sqrt{x}(x+1) = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$
9. $\frac{x^3+4}{x^2} = x + 4x^{-2}$

### 1.0.3 Derivace matematických operací mezi funkcemi

Nechť $f$, $g$ jsou funkce a $c \in \mathbb{R}$ konstanta. Platí

1. $[cf]' = cf'$
2. $[f \pm g]' = f' \pm g'$
3. $[fg]' = f'g + fg'$
4. $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$
5. $[f(g(x))]' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = f'(g(x))g'(x)$

## 1.1 Výpočet derivace

Určete derivace následujících funkcí, kde $a, b, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $f(x) = x^6 + \frac{1}{x^6}$.
2. $f(x) = x^2 + 2x + 6$.
3. $f(r) = r^3 + 2r^2 - 1$
4. $f(x) = 3x\sqrt{x} + 9x^5$.
5. $f(x) = 1 - e^{bx}$.
6. $f(x) = (x^2 - 1)^4$.
7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{ax^2}$.
8. $f(x) = \frac{1}{(x+6)^2}$.
9. $f(x) = \frac{a}{(\mu x+b)^2}$.

---

*Řešení.*

1. $f'(x) = 6x^5 - \frac{6}{x^7}$
2. $f'(x) = 2x + 2$
3. $f'(r) = 3r^2 + 4r$
4. $f'(x) = (3x^{3/2} + 9x^5)' = \frac{9}{2}\sqrt{x} + 45x^4$
5. $f'(x) = -be^{bx}$
6. $f'(x) = 4(x^2 - 1)^3 2x = 8x(x^2 - 1)^3$
7. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{ax^2}2ax$
8. $f'(x) = \frac{-2}{(x+6)^3}$
9. $f'(x) = \frac{-2a\mu}{(\mu x+b)^3}$

## 1.2 Růst ryby

Biologové navrhli funkci

$$l = 0.03937t^3 - 0.945t^2 + 10.033t + 3.073$$

jako model délky jistého druhu ryby, kde $l$ je délka ryby v centimetrech, a $t$ je věk v letech. Vypočtěte derivaci $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$. Určete jednotku této derivace a slovní interpretaci hodnoty derivace v bodě $t = 12$.

*Upraveno podle Stewart, Day: Biocalculus. Calculus for the life siences. V tomto příkladě se setkáváme s klasickou interpretací derivace jako rychlosti změny, tj. hodnoty o kterou se změní závislá veličina, když se nezávislá veličina změní o jednotku.*

---

*Řešení.* Jednotka derivace délky podle věku je stejná, jako bychom délku dělili věkem. Tedy $\left[\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right] = \mathrm{cm/rok}$, tj. centimetr za rok.

Derivace je rychlost změny. Pokud derivujeme délku ryby podle času, je derivace rychlost s jakou se mění délka ryby v čase. Převedeno do srozumitelnějšího jazyka to je možné elegantněji vyjádřit tak, že derivace udává (v centimetrech za rok) okamžitou rychlost růstu ryby, přičemž velikost ryby vyjadřujeme její délkou (a ne například hmotností).

Zadaná funkce vyjadřující závislost délky na čase je polynom. Použitím pravidel pro derivování je snadné ukázat, že pro derivaci délky podle času platí

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 3 \cdot 0.03937t^2 - 2 \cdot 0.945t + 10.033 = 0.11811t^2 - 1.89t + 10.033$$

a pro $t = 12\,\mathrm{let}$ dostáváme

$$\left.\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right|_{t=12} = 4.4\,\mathrm{cm/rok}.$$

Dvanáctiletá ryba roste rychlostí přibližně 4.4 centimetrů za rok, tj. mezi dvanáctým a třináctým rokem vyroste přibližně o 4.4 centimetru. (Slovo přibližně je použito proto, že derivace je okamžitá rychlost růstu a není zaručeno, že tato rychlost se udrží po celou jednotku času, tj. po celý rok.)

- Sage výpočet
- Sage numerický odhad s ilustrací toho, že výsledek se dá odhadnout u použitím základních aritmetických operací, ale že délka kroku nemůže být ani moc krátká ani moc dlouhá.

## 1.3 Bazální metabolismus

Bazální metabolismus $M$ (ve wattech) souvisí s hmotností $W$ vztahem

$$M = AW^n,$$

kde $n$ je pro mnoho živočišných druhů blízké číslu 0.75 a $A$ je konstanta, která je specifická pro daný druh a v rámci daného druhu klesá s věkem. Určete derivaci

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}W}$$

a určete i fyzikální jednotku a slovní interpretaci této derivace.

*Zpracováno podle Monteith, Unsworth: Principles of Environmental Physics. Tady je opět klasická interpretace derivace jako rychlosti změny. Rychlost změny ale nemusí být jenom klasické chápání rychlosti jako závislosti na čase. Derivace vyjadřuje, jak závislá veličina reaguje na změny nezávislé veličiny. Pro pochopení, co derivace vyjadřuje, hraje velkou roli i jednotka této derivace. Označení je ponecháno z původní literatury, mimo jiné $M$ není hmotnost a $W$ není watt. Vztah je v literatuře znám jako Kleiberův zákon. Vysvětluje se pomocí něj rozdílná délka života různých živočišných druhů.*

---

*Řešení.*

Pro výpočet si stačí uvědomit, že funkce je konstantním násobkem mocninné funkce a umíme ji tedy zderivovat podle pravidla pro derivaci konstantního násobku a pravidla pro derivaci mocninné funkce. Derivace je

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}W} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}W}(AW^n) = nAW^{n-1}$$

podle pravidla pro derivaci konstantního násobku a pro derivaci mocniny. Jednotka derivace je stejná, jako bychom místo derivování dělili, tj. watt na kilogram,

$$\left[\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}W}\right] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}}.$$

Derivace udává rychlost, s jakou se projeví změna hmotnosti na bazálním metabolismu. Je to nárůst bazálního metabolismu způsobený nárůstem hmotnosti a přepočtený na jednotkovou změnu hmotnosti. Přibližně také změna bazálního metabolismu ve wattech při změně hmotnosti o kilogram u velkých živočichů nebo v miliwatech při změně hmotnosti o gram u drobných živočichů. Například u malých ptáčků nemá smysl uvažovat nárůst hmotnosti o kilogram a pro interpretaci raději přejdeme k jednotkám tisíckrát menším.

## 1.4 Mezní náklady (marginal cost)

Náklady na produkci $x$ letadel za rok jsou (v milionech Euro) dány funkcí

$$C(x) = 6 + \sqrt{4x+4}, \qquad 0 \leq x \leq 30.$$

Platí $C'(15) = 0.25$. Určete, jakou tato derivace má slovní interpretaci a určete i jednotku této derivace.

*Toto je jedna z nejrozšířenější aplikací derivací mimo přírodní vědy. Zajímáme se o to, jak rychle rostou ekonomické veličiny, protože ekonomika je za vším. Veličiny, které v ekonomii získáváme derivováním, obsahují zpravidla slovo "mezní", nebo též "marginální". Podle Wikipedie nastupující technická revoluce nazývaná Průmysl 4.0 přinese výrobu s velmi malými mezními náklady. Tedy derivace nákladů na výrobu podle množství vyrobeného zboží bude malá. To odpovídá představě výroby v robotizovaných halách, kde hlavním nákladem je vybudování výrobního zařízení.*

---

*Řešení.*

Jednotka derivace $C'(x)$ je milion Euro/kus, resp. milion Euro/letadlo, resp. milion Euro, podle toho, jak nazveme jednotky v nichž měříme počet letadel.

Derivace $C'(15)$ vyjadřuje rychlost, s jakou rostou náklady při produkci 15 letadel. Je to cena vztažená na jednotkový přírůstek, tj. jedná se vlastně o cenu výroby šestnáctého letadla. Šestnácté letadlo má výrobní náklady 0.25 milionů euro.

*Poznámka 1:* Jinou cestou jak určit cenu šestáctého letadla je použít rozdíl

$$C(16) - C(15) \approx 0.246.$$

Toto je cesta, která se zdá výhodnější, protože není nutné derivovat. Ale tato cesta zpravidla vede ke složitějším postupuům, jakmile tento výpočet vstupuje jako jedna z komponent do složitějšího modelu. Odhad ceny dalšího letadla při produkci $x$ letadel je bez derivace roven

$$C(x+1) - C(x) = \sqrt{4(x+1)+4} - \sqrt{4x+4}$$

a s derivací

$$C'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+4}}.$$

Ve druhém případě máme zlomek s konstantním čitatelem (vlastně se jedná o mocninnou funkci s exponentem $-\frac{1}{2}$), v prvním případě máme rozdíl dvou odmocnin. Druhá metoda tedy vede k jednodušší funkci a tato jednoduchost může být kriticky důležitá, pokud námi odvozená cena dalšího letadla vstupuje do dalšího výpočtu.

*Poznámka 2:* Možná jste si vzpomněli na příklady z nižších škol týkající se přímé úměrnosti. Jsou to příklady typu "Za výrobu patnácti jachet ruský oligarcha zaplatí částku $C$. Kolik zaplatí za šestnáct jachet?" Takové příklady jsou založeny na předpokladu, že výroba každé jachty stojí stejně a cena je nezávislá na počtu. V takovém případě je možné řešit úlohu trojčlenkou, pomocí přímé úměrnosti. V takové situaci by závislost ceny na množství byla lineární. V praxi tomu tak ale často není, závislost je nelineární. Proto není možné použít úměrnost a proto mají v ekonomii místo i veličiny jako mezní náklady, které jsme vypočítali v tomto příkladě pomocí derivace. Slovo "mezní" je odvozeno od skutečnosti, že tato veličina pomáhá určit mez množství výroby, kdy se zvýší cena za jednotku

## 1.5 Vzdálenost k horizontu

Vzdálenost k horizontu pro pozorovatele ve výšce $h$ nad Zemí je dána funkcí $H = \sqrt{2Rh}$, kde $R = 6.371 \times 10^6$ m je poloměr Země (viz zde). Po dosazení a vydělení faktorem 1000, aby $H$ vycházelo v kilometrech, dostáváme vzorec

$$H = 3.57\sqrt{h},$$

kde $h$ je v metrech a $H$ v kilometrech. Určete hodnotu této derivace $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}h}$ pro $h = 5\,\mathrm{m}$ (včetně jednotky) a slovní interpretaci této derivace.

*Tento příklad opět udává derivaci jako rychlost změny, ale nezávislá proměnná není čas. Sledujeme vzájmenou relaci dvou délek - vzdálenosti k horizontu a výšky pozorovatele. V případech jako je tento je rozměr veličiny derivované stejný, jako rozměr veličiny, podle které se derivuje. Potom je derivace vlastně bez rozměru. Někdy je však vhodné pro srozumitelnější interpretaci jednotky nevykrátit, obzvlášť v případě jako zde, kdy se obě délky udávají v řádově jiných jednotkách (metry versus kilometry).*

---

*Řešení.*

Pro $H = 3.57\sqrt{h}$ platí

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}h} = \frac{1}{2} \times 3.57 \times \frac{1}{\sqrt{h}}$$

a numericky

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}h}(5) = \frac{3.57}{2\sqrt{5}} \approx 0.7983\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{m}} \approx 0.8\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{m}}.$$

Vzdálenost k horizontu pro pozorovatele ve výšce 5 metrů roste rychlostí 0.8 kilometru na každý metr výšky navíc. Toto je interpretace pro praktické využití. Kromě toho se jednotky dají upravit a ve skutečnosti derivace žádný fyzikální rozměr nemá

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}h}(5) = 0.7983 \times \frac{1000\,\mathrm{m}}{\mathrm{m}} = 798$$

a každá změna výšky pozorovatele se na vzdálenosti k horizontu projeví svým 800-násobkem.

Sage výpočet

## 1.6 Rychlost s jakou roste obsah kruhu

Váté písky je bezlesý pruh podél železniční trati nedaleko Bzence, kde je extrémní sucho (Moravská Sahara). V dřívějších dobách byly v pruhu podél železnice velmi časté požáry kvůli provozu parních vlaků. Předpokládejme, že požár se v této vysušené oblasti šíří ve tvaru kruhu. V určitém okamžiku je poloměr 50 metrů a roste rychlostí 1.5 metrů za minutu. Zapište zadání pomocí derivací a určete jak rychle roste plocha zasažená ohněm.

*V tomto příkladě se učíme, že ze znalosti vztahů mezi veličinami můžeme odvodit vztah, mezi rychlostmi změn, tj. do statických vzorců můžeme dodat dynamiku vývoje. V praxi někdy jde příklad tohoto typu obejít úvahou: teď je poloměr 50 metrů, tomu odpovídá jakási plocha, za minutu bude poloměr 51.5 metru, tomu odpovídá opět jakási plocha a provnáním s plochou původní snadno zjistím přírůstek. To pro nás může být kontrola, že aparát funguje. Pro nás je teď důležité naučit se tento aparát na malých věcech, abyste mohli později dělat věci velké.*

---

*Řešení.*

Je zadán vztah mezi dvěma veličinami a pro jednu z těchto veličin známe její hodnotu derivaci podle času. Máme za úkol určit derivaci podle času druhé z veličin.

Ze zadání známe poloměr $r = 50\,\mathrm{m}$ a rychlost růstu poloměru $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 1.5\,\mathrm{m\,min}^{-1}$. Zajímá nás rychlost růstu obsahu $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$.

Derivováním vztahu

$$S = \pi r^2$$

podle $r$ získáváme

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\pi r.$$

Derivováním podle $t$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

a numericky

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 2\pi \times 50 \times 1.5 \approx 471\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{min}^{-1}.$$

Sage výpočet (v tomto jednoduchém případě spíše jako ukázka zápisu, než jako nástroj pro urychlení výpočtu)

## 1.7 Sůl nad zlato

V pohádce *Sůl nad zlato* sype Maruška z bezedné slánky sůl na hromadu soli ve tvaru kužele, který roste tak, že objem je v každém okamžiku svázán s výškou vzorcem

$$V = \frac{1}{4}h^3.$$

Výška je 0.5 metru a vydatnost solničky 10 litrů (tj. 0.01 krychlových metrů) soli za minutu. Určete, jak rychle roste hromada soli do výšky.

---

*Řešení.*

Je zadán vztah mezi dvěma veličinami a pro jednu z těchto veličin známe její hodnotu derivaci podle času. Máme za úkol určit derivaci podle času druhé z veličin.

Podle zadání je $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0.01$ krychlových metrů za minutu, $h = 0.5$ metru a chceme znát $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$. Derivováním dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{4}h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

Odsud

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\frac{1}{h^2}$$

a po dosazení

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3} \times 0.01 \times \frac{1}{0.5^2}\,\mathrm{m\,min}^{-1} = 0.053\,\mathrm{m\,min}^{-1}.$$

Hromada roste do výšky rychlostí 5.3 centimetru za minutu.

Sage výpočet (v tomto jednoduchém případě spíše jako ukázka zápisu, než jako nástroj pro urychlení výpočtu)

## 1.8 Rychlost s jakou roste obsah kruhu II

Město má přibližně tvar kruhu o poloměru 10 km a žije v něm 300 000 obyvatel. Jak rychle musí růst poloměr kruhu (velikost města), pokud počet obyvatel roste rychlostí 10 000 obyvatel za rok a chceme udržet stejnou hustotu osídlení?

*Toto je mírná modifikace příkladu s požárem. Protože město má konstantní hustotu osídlení, jsou počet obyvatel i rozloha přímo úměrné a je to podobné, jako bychom jednu veličinu vyjadřovali ve dvou různých jednotkách.*

---

*Řešení.*

Ze zadání: $r = 10\,\mathrm{km}$, $N = 300\,000$, $\sigma = \frac{N}{\pi r^2}$ je hustota osídlení a ta je konstantní, $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 10\,000\,\mathrm{rok}^{-1}$. Zajímá nás $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$.

Výpočet: Pro počet obyvatel platí $N = \sigma\pi r^2$ a derivováním

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sigma\pi 2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

Odsud

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\pi r\sigma}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$$

a protože $\pi r\sigma = \frac{N}{r}$, máme

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{2N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{10}{2 \times 300\,000} \times 10\,000 = 0.166\,\mathrm{km}\,\mathrm{rok}^{-1} \approx 170\,\mathrm{m}\,\mathrm{rok}^{-1}$$

Existuje ještě poněkud přímočařejší, ale na provedení mírně náročnější postup, protože je nutné derivovat podíl funkcí. Zderivujeme přímo definiční vztah pro hustotu osídlení $\sigma = \frac{N}{\pi r^2}$ podle času. Vlevo je derivace konstanty, tj. nula, vpravo derivace podílu. Proto

$$0 = \frac{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\pi r^2 - N2\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}}{(\pi r^2)^2}$$

a odsud

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\pi r^2 - N2\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Nyní osamostatníme derivaci poloměru a dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\pi r^2 &= N2\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\frac{r}{2N}\end{aligned}$$

a výsledek je stejný jako v předchozím postupu.

# Kapitola 2

# Využití derivací v matematických modelech

- Procvičíme si interpretaci derivace jako rychlosti změny.
- Naučíme se sestavovat matematické modely situací, ve kterých se veličina mění nekonstantní rychlostí
- Prerekvizitou je schopnost chápat derivaci jako rychlost změny a umět matematicky vyjádřit úměrnost mezi veličinami.

## 2.1 Tepelná výměna podle Newtonova zákona

Newtonův zákon ochlazování je možné použít pro tělesa, u nichž teplota je ve všech místech stejná a efekty spojené s vedením tepla jsou zanedbatelné. Takové objekty charakterizujeme nízkým Biotovým číslem (naučíte se v navazujících předmětech jako Fyzikální vlastnosti dřeva). Předpokládejme, že nevytápěná místnost tyto podmínky splňuje.

Teplota v místnosti kde se přestalo topit při teplotě $T = 23°\mathrm{C}$ se mění tepelnou výměnou s okolím. Rychlost, s jakou teplota místnosti v zimě klesá je úměrná rozdílu teplot v místnosti a venku. Vyjádřete toto pozorování kvantitativně pomocí derivací. Sestavíte tím matematický model popisující pokles teploty v této místnosti.

*V tomto příkladu se učíme, že tam, kde se pracuje s rychlostmi změn hraje při kvantitativním popisu roli derivace. Ze střední školy známe tvary fyzikálních zákonů a vztahů v omezené platnosti, kdy se rychlost nemění (jako například rovnoměrný pohyb) nebo mění jenom velmi speciálním způsobem (jako například rovnoměrně zrychlený pohyb). Pomocí derivací tato omezení středoškolské fyziky padají.*

---

*Řešení.*

Je-li $T$ teplota a $t$ čas, je veličina $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ rychlost s jakou roste teplota a veličina $-\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ rychlost, s jakou teplota klesá. Podle předpokladů platí

$$-\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T - T_{\text{venku}})$$

a model má tvar

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_{\text{venku}}), \quad T(0) = 23°\mathrm{C}$$

kde $k$ je konstanta úměrnosti a $T_{\text{venku}}$ teplota venku.

## 2.2 Veličiny z rovnice vedení tepla

V případech, kdy je nutno uvažovat vedení tepla (vysoké Biotovo číslo), postupujeme podle rovnice vedení tepla, kterou jsme na přednášce odvodili pro jednorozměrný případ ve tvaru

$$\varrho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big).$$

Typickým případem vedení tepla v jedné dimenzi je vedení tepla ve stěně.

Uvažujme jednorozměrnou úlohu s vedením tepla. Osa $x$ směřuje doprava, teplota v bodě $x$ a čase $t$ je $T(x,t)$ ve stupních Celsia. Tok tepla v čase $t$ a v bodě $x$ je $q(x,t)$ v joulech za sekundu. Kladný tok je ve směru osy $x$. Podle Fourierova zákona je

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Budeme uvažovat jednorozměrný objekt, tyč nebo stěnu. Počáteční teplota je $0\,^\circ\mathrm{C}$, pravý konec udržujeme na této teplotě, levý konec ohříváme na $20\,^\circ\mathrm{C}$ a udržujeme na této teplotě. Ve zbytku tyče (stěny) se postupně nastolí rovnováha vlivem vedení tepla.

Vyjádřete následující veličiny a určete jejich znaménko.

1. Rychlost s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce času.
2. Rychlost s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce polohy, tj. jak rychle roste teplota směrem doprava.
3. Rychlost s jakou klesá teplota jako funkce polohy, tj. směrem doprava.
4. Rychlost se kterou roste (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy.
5. Rychlost se kterou klesá (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy.

*Tato úloha je jednoduchá a vlastně není na počítání, ale jenom na ujasnění si toho, co derivace vyjadřují a kdy jsou kladné a kdy záporné. To je nutné znát při zadávání modelů do numerických simulací. Výpočet za člověka udělají počítače, ale slovní interpretaci ani kontrolu, že je model relevantní a nemá popletená znaménka, za člověka nikdo neudělá. Používáme postup všeobecně přijímaný ve fyzikálních modelech. To však někdy nekoresponduje s výpočetními nástroji. Například ANSYS, nejpoužívanější program na výpočet modelů typu rovnice vedení tepla, používá pro zadání okrajových podmínek nikoliv tok ven z tělesa, ale tok dovnitř tělesa. Tedy pro fyzika a výpočtáře mají tyto podmínky opačné znaménko. Proto je potřeba vědět co se počítá, jak se systém chová, jak se to projeví na jeho vlastnostech a potom zkontrolovat, jestli to tak vychází i vě výpočetním modelu, jestli nepočítáme něco nesmyslného.*

---

*Řešení.*

Shrneme si, co je možné očekávát během průběhu děje. U studené tyče ohřejeme levý konec a teplotu udržujeme, pravý konec udržujmeme na nízké teplotě. Tyč se postupně ohřeje a pořád, během dosahování rovnováhy i po nastolení rovnováhy, bude blíž k teplému konci teplota vyšší. Směrem doprava tedy teplota bude klesat a tím směrem také poteče teplo. Po dodsažení rovnováhy bude toto teplo stejné, jako energie, kterou musíme na ohřívaném konci dodávat a na ochlazovaném konci odebírat. Než však nastane rovnováha, musí se všechny části tyče prohřát na cílovou teplotu. To znamená, že při předávání tepla směrem k chladnějšímu konci musí část tepla zůstat v daném místě jako vnitřní energie a projeví se zvýšením teploty. Do dosažení rovnovážného stavu tyč vede teplo, ale každá část tyče předává dál jenom část tepla, protože další část použije na zvýšení své teploty. Proto platí, že čím více jsme napravo, tím méně tam teče tepla.

1. Rychlost, s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce času je $\frac{\partial T}{\partial t}$ a tato derivace je v každém bodě kladná, protože tyč se ohřívá. Po čase se asi ustálí rovnováha a derivace bude nulová, teplota se přestane měnit. Měříme ve stupních Celsia za sekundu. $\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right] = {}^\circ\mathrm{C}\,\mathrm{s}^{-1}$
2. Rychlost, s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce polohy, tj. jak rychle se roste teplota směrem doprava, je $\frac{\partial T}{\partial x}$ a tato derivace je záporná, protože vlevo je horký konec a teplota směrem doprava klesá. Měříme ve stupních Celsia na metr. $\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right] = {}^\circ\mathrm{C}\,\mathrm{m}^{-1}$

3. Rychlost s jakou klesá teplota jako funkce polohy, tj. směrem doprava, je $-\frac{\partial T}{\partial x}$ a tato veličina je kladná, protože vlevo je horký konec a teplota směrem doprava opravdu klesá. Měříme ve stupních Celsia na metr. $\left[-\frac{\partial T}{\partial x}\right] = {}^\circ\mathrm{C}\,\mathrm{m}^{-1}$
4. Rychlost, se kterou roste (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy je $\frac{\partial q}{\partial x}$. Teplo teče doprava a přitom se spotřebovává, protože se ohřívá tyč. Proto tok klesá a parciální derivace je záporná. Měříme v joulech za sekundu na metr. $\left[\frac{\partial q}{\partial x}\right] = \mathrm{J}\,\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$
5. Rychlost, se kterou klesá (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy je $-\frac{\partial q}{\partial x}$ a tato veličina je kladná, což plyne z předchozího bodu a z toho, že jsme změnili znaménko. Tato veličina udává, kolik tepla za jednotku času ubude v toku na metrovém úseku tyče. Ze zákona zachování energie se toto teplo nemůže "ztratit", ale použije se na zvýšení teploty, což je právě obsahem rovnice vedení tepla. Měříme v joulech za sekundu na metr. $\left[-\frac{\partial q}{\partial x}\right] = \mathrm{J}\,\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$

## 2.3 Okrajové podmínky pro rovnici vedení tepla

K modelu stěny pomocí rovnice vedení tepla je ještě nutné přidat podmínky související s počátečním stavem (počáteční podmínky) a s chováním na okrajích (okrajové podmínky).

Nechť stěna je na intervalu $x \in [0, L]$, $x = 0$ je vnitřní okraj a $x = L$ je vnější okraj. Výraz $-k\frac{\partial T}{\partial x}$ udává tok tepla ve směru osy $x$. Tok ve směru osy $x$ má kladné znaménko. Naformulujte okrajové podmínky v následujících scénářích.

1. Z venku dokonale izolovaná stěna. Na hranici $x = L$ nedochází k toku tepla.
2. Vnitřní část stěny je udržovaná na konstantní teplotě $T = 23°$C.
3. Stěna je zvenku osvětlená a zahřívaná Sluncem. Na vnější hranici je konstantní tok tepla směrem do stěny.
4. Stěna je zvenku ochlazována prouděním vzduchu. Tok tepla mezi stěnou a okolím je úměrný rozdílu teplot stěny a okolí.
5. Stěna je zevnitř ohřívána prouděním vzduchu od radiátorů. Tok tepla mezi stěnou a okolím je úměrný rozdílu teplot stěny a okolí.

*Zpracováno podle Cengel: Mass and heat transfer.*

---

*Řešení.*

Je-li podmínka na teplotu, figuruje v matematické formulaci $T$ vypočtená v bodě $x = 0$ nebo $x = L$ podle toho, jedná-li se o vnitřní nebo vnější část stěny. $T$ je funkce polohy, tj. $T = T(x)$. Je-li podmínka na tok, figuruje v matematické formulaci tok ve tvaru $-k\frac{\partial T}{\partial x}$, opět vypočtená v jednom z krajních bodů.

1. Nulový tok pro $x = L$ znamená $-k\frac{\partial T}{\partial x}(L) = 0$, což je ekvivalentní $\frac{\partial T}{\partial x}(L) = 0$.
2. Teplota 23 stupňů pro $x = 0$ znamená $T(0) = 23$
3. $-k\frac{\partial T}{\partial x}(L) = -Q$, kde $Q$ je teplo za jednotku času dodané ze Slunce. Jedná se o výkon Slunce dopadající na stěnu vynásobený koeficientem absorbce, protože část tepelného výkonu se odráží. Záporné znaménko je proto, že teplo teče do stěny, tj. proti směru osy $x$.
4. $-k\frac{\partial T}{\partial x}(L) = h(T(L) - T_{\text{okolí}})$, kde $h$ je koeficient přestupu tepla.
5. $-k\frac{\partial T}{\partial x}(0) = h(T_{\text{místnost}} - T(0))$, kde $h$ je koeficient přestupu tepla.

Všimněte si, že poslední dvě podmínky se liší znaménkem u $T$. To proto, že v jednom případě je kladný směr toku tepla do materiálu a jednou z materiálu. Pokud chceme mít popis jednotný, nebo nezávislý na zvolené souřadné soustavě, formulujeme podmínky pro tok tepla ven z materiálu. Tento tok získáme tak, že tok tepla vynásobíme skalárně s jednotkovým vektorem směřujícím ven z materiálu kolmo na jeho povrch. V tomto případě by pro tok ze stěny do místnosti bylo $k\frac{\partial T}{\partial x}(0) = h(T(0) - T_{\text{místnost}})$. Tento tok by byl záporný, protože ve skutečnosti teplo uniká z místnosti stěnou ven.

## 2.4 Model růstu úměrného velikosti chybějícího množství

Mnoho živočichů roste tak, že mohou dorůstat jisté maximální délky a rychlost jejich růstu je úměrná délce, která jim do této maximální délky chybí (tj. kolik ještě musí do této maximální délky dorůst). Sestavte matematický model popisující takovýto růst (von Bertalanffy growth model).

*Jakmile vidíme, že v zadání figuruje rychlost změny veličiny, která nás zajímá, je jasné, že kvantitativní model bude obsahovat derivaci. Zatím se učíme model zapsat, později ho budeme umět i vyřešit.*

---

*Řešení.*

Je-li $L$ délka a $L_{\max}$ maximální délka, potom do maximální délky chybí $L_{\max} - L$ a model má tvar

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = k(L_{\max} - L).$$

## 2.5 Kontaminace a čištění

Znečišťující látky se v kontaminované oblasti rozkládají tak, že za den se samovolně rozloží 8% aktuálního znečištění. Kromě toho pracovníci odstraňují látky rychlostí 30 galonů denně. Vyjádřete tento proces kvantitativně pomocí vhodného modelu.

*Tento příklad opět zmiňuje rychlost změny, tj. derivaci. Tentokrát se na změně podílejí dva procesy a jejich účinek se sčítá. Příklad navíc připomíná, jak se pracuje se změnou vyjádřenou procenty. Toto je používané například při úročení spojitým úrokem. Pokud pokles změníme na růst, tj. pokud změníme znaménka u derivace, máme okamžitě model růstu financí na účtu, na kterém se pravidelně připisuje úrok a k tomu se přidává fixní úložka.*

---

*Řešení.* Je-li $y$ znečištění v galonech a $t$ čas ve dnech, má model tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -0.08y - 30.$$

## 2.6 Logistická rovnice: model využívání přírodních zdrojů

Při modelování růstu populace o velikosti $x(t)$ často pracujeme s populací žijící v prostředí s omezenou úživností (nosnou kapacitou). Často používáme model

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

kde $r$ a $K$ jsou parametry modelu (reálné konstanty). Nakreslete graf funkce $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ a ověřte, že pro velká $x$ je $f(x)$ záporné a velikost populace proto klesá. Pokud populaci lovíme konstantní rychlostí, sníží se pravá strana o konstantu, kterou označíme $h$. Ukažte, že pro intenzivní lov bude pravá strana rovnice pořád záporná a intenzivní lov tak způsobí vyhubení populace. Dá se najít kritická hodnota lovu oddělující vyhynutí populace a její trvalé přežívání?

*Toto je asi nejdůležitější rovnice pro modelování biologických jevů. Používá se při modelování vývoje obnovitelných zdrojů a bývá modifikována pro konkrétní případy podle toho, jak populace interaguje s okolím.*

---

*Řešení.*

Funkce $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ je kvadratická funkce s nulovými body $x = 0$ a $x = K$, vrcholem uprostřed mezi nulovými body (tj. pro $x = \frac{K}{2}$) a parabola je otočená vrcholem nahoru. Proto je napravo od $x = K$ záporná. To odpovídá tomu, že populace s velikostí přesahující nosnou kapacitu v dlouhodobém horizontu vymírá.

Funkce $f_h(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - h$ vznikne posunutím funkce $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ o $h$ dolů. Pokud posuneme hodně, dostane se celá parabola pod osu $x$ a funkce bude pořád záporná. Kritická hodnota je v situaci, kdy mizí možnost, že $f_h(x)$ má body kde je kladná a populace se může rozvíjet. To nastane, pokud se vrchol paraboly dostane na osu $x$, tj. $h$ je rovno funkční hodnotě funkce $f(x)$ v bodě $x = \frac{K}{2}$.

## 2.7 Populace jelenů

Populace jelenů v národním parku přibývá rychlostí 10% za rok. Správa parku každý rok odebere 50 jedinců. Napište matematický model pro velikost populace jelenů v tomto parku.

---

*Řešení.*

Je-li $x$ velikost populace jelenů, platí

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0.10x - 50,$$

kde $t$ je čas v letech.

## 2.8 Hrubý model chřipkové epidemie

Rychlost s jakou roste počet nemocných chřipkou je úměrný současně počtu nemocných a počtu zdravých jedinců. Sestavte model takového šíření chřipky.

*Toto je současně model popisující šíření informace v populaci, stačí si místo chřipky představit nějakou informaci předávanou mezi lidmi (sociální difuze).*

---

*Řešení.*

Je-li $M$ velikost populace a $y$ počet nemocných, je v populaci $M - y$ zdravých a model má tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky(M - y).$$

## 2.9 Ropná skvrna

Kruhová ropná skvrna na hladině se rozšiřuje tak, že její poloměr jako funkce času roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Vyjádřete proces kvantitativně pomocí derivací.

---

*Řešení.*

Je-li $r$ poloměr, je $r^2$ druhá mocnina a protože se jedná o nepřímou úměrnost, platí

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{r^2}.$$

## 2.10 Model učení

Rychlost učení (tj. časová změna objemu osvojené látky nebo procento z maximální manuální zručnosti) je úměrná objemu dosud nenaučené látky. Vyjádřete proces kvantitativně pomocí derivací.

---

*Řešení.*

Je-li $L$ objem naučené látky a $L_{\max}$ maximální objem látky kterou je možné se naučit, je objem dosud nenaučené látky $L_{\max} - L$ a model má tvar

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = k(L_{\max} - L).$$

## 2.11 Výpočet derivace

Určete derivace následujících funkcí jedné proměnné. Ostatní veličiny jsou parametry. Pokud v zadaném vzorci odhalíte vztah mezi veličinami známý ze středoškolské geometrie, pokuste se najít odpovídající interpretaci derivace.

1. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$
2. $S(r) = 4\pi r^2$
3. $A(r) = \pi r^2$
4. $V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
5. $S(a) = 6a^2$
6. $U(v) = \frac{1}{2}mv^2$
7. $V(r) = \frac{a}{r^2}$
8. $f(y) = ae^{by}$
9. $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
10. $S(h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
11. $S(a) = \frac{1}{2}(a + c)v$
12. $L(r) = 2\pi r$

*V tomto příkladě se učíme mimo jiné derivovat i podle jiné proměnné než podle $x$. To je nezbytné pro aplikace. Abychom nebyli fixováni na proměnnou $x$, je vhodné se učit vzorce pro derivování vyjadřovat slovně a bez jména konkrétní proměnné.*

---

*Řešení.*

1. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2$, rychlost změny objemu koule při změnách poloměru, tj. změna objemu koule vztažená k jednotkové změně poloměru
2. $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 8\pi r$, rychlost změny povrchu koule při změnách poloměru, tj. změna povrchu koule vztažená k jednotkové změně poloměru
3. $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} = 2\pi r$, rychlost změny obsahu kruhu při změnách poloměru, tj. změna obsahu kruhu vztažená k jednotkové změně poloměru
4. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} = \frac{1}{3}\pi r^2$, rychlost změny objemu kužele při změnách výšky, tj. změna objemu kužele vztažená k jednotkové změně výšky při zachovaném poloměru podstavy
5. $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a} = 12a$, změna povrchu krychle vyvolaná jednotkovou změnou délky hrany krychle
6. $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}v} = mv$
7. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -2\frac{a}{r^3}$
8. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = abe^{by}$
9. $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi r + 2\pi h$, ...

10. $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\pi r, \ldots$
11. $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a} = \frac{1}{2}v, \ldots$
12. $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r} = 2\pi, \ldots$

# Kapitola 3

# Výpočet derivací, lineární aproximace

- Naučíme se derivovat součin a podíl funkcí. Jedná se o použití vzorců, nejsou nutné předchozí znalosti, je nutné mít pouze k dispozici vzorce.
- Naučíme se používat vzorec pro lineární aproximaci funkce. Naučíme se nahrazovat komplikované funkční závislosti závislostmi jednoduššími.
- Naučíme se další triky získané díky lineární a polynomiální aproximaci: numerické derivování a numerické řešení rovnic.

## 3.1 Výpočet derivace součinu a podílu

Určete derivace následujících funkcí, kde $a, b, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $f(x) = x \ln x$
2. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$
3. $f(x) = \frac{x}{ax+b}$
4. $f(t) = \frac{t}{t^2+6}$
5. $f(x) = \frac{ax^2}{x^2+1}$
6. $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$
7. $f(x) = \frac{ax}{(x-1)^2}$

---

*Řešení.*

1. $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x} = 1 + \ln x$
2. $f'(x) = \sqrt{x^2+a} + x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
3. $f'(x) = \frac{1\cdot(ax+b)-x\cdot a}{(ax+b)^2} = \frac{b}{(ax+b)^2}$
4. $f'(t) = \frac{(t^2+6)-t2t}{(t^2+6)^2} = \frac{6-t^2}{(t^2+6)^2}$
5. $f'(x) = \frac{2ax(x^2+1)-ax^2 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2ax}{(x^2+1)^2}$
6. $f'(x) = \frac{6x^2(x^2+1)-2x^3 2x}{(x^2+1)^2}$
7. $f'(x) = \frac{a(x-1)^2-ax2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{a(x-1)-ax2}{(x-1)^3} = \cdots$

## 3.2 Základní lineární aproximace

Najděte lineární aproximace funkcí $\sin x$, $\cos x$ a $(1+x)^n$ v okolí nuly. Tím dokážete platnost následujících přibližných vzorců platných pro $x$ blízko nuly.

$$\sin x \approx x$$
$$\cos x \approx 1$$
$$(1+x)^n \approx 1+nx$$

*První dvě aproximace využijeme později pro odvození tvaru matice malých rotací, což je důležité při studiu deformace materiálů. Poslední můžeme využít například pro to, abychom z relativistického vzorce pro celkovou energii extrahovali část závislou na rychlosti, tj. kinetickou energii (na přednášce).*

---

*Řešení.*

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

1. $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(x) = (\sin(x))' = \cos x$, $f'(0) = \cos(0) = 1$
$$\sin(x) \approx 0 + 1 \cdot (x - 0) = x$$
2. $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$, $f(0) = \cos 0 = 1$, $f'(x) = (\cos(x))' = -\sin x$, $f'(0) = -\sin(0) = 0$
$$\cos(x) \approx 1 + 0 \cdot (x - 0) = 1$$
3. $f(x) = (1+x)^n$, $x_0 = 0$, $f(0) = (1+0)^n = 1$, $f'(x) = ((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}$, $f'(0) = n(1+0)^{n-1} = n$
$$(1+x)^n \approx 1 + n \cdot (x - 0) = 1 + nx$$

## 3.3 Lineární aproximace

Veličina $y$ je funkce proměnné $x$. Najděte její lineární aproximaci v okolí zadaného bodu.

1. $y = xe^x$ v okolí bodu $x = 0$
2. $y = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ v okolí bodu $x = 0$
3. $y = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ v okolí bodu $x = K$
4. $y = \sqrt{x}$ v okolí bodu $x = 1$
5. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ v okolí bodu $x = 1$

*Ve druhém a třetím příkladě aproximujeme funkci modelující růst populace v prostředí s nosnou kapacitou $K$. Aproximace v okolí bodu $x = 0$ odpovídá velmi malé populaci. Proto se konstanta úměrnosti ze získané lineární aproximace nazývá* invazní parametr.

---

*Řešení.*

1. $f(x) = xe^x$, $x_0 = 0$, $f(0) = 0e^0 = 0$, $f'(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x$, $f'(0) = e^0 + 0e^0 = e^0 = 1$
$$xe^x \approx 0 + 1 \cdot (x - 0) = x$$
2. $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, $x_0 = 0$, $f(0) = r0\left(1 - \frac{0}{K}\right) = 0$, $f'(x) = \left(rx - r\frac{1}{K}x^2\right)' = r - \frac{2r}{K}x$, $f'(0) = r - \frac{2r}{K} \cdot 0 = r$
$$rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \approx 0 + r(x - 0) = rx$$

3. $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, $x_0 = K$, $f(K) = rK\left(1 - \frac{K}{K}\right) = rK(1-1) = 0$, $f'(x) = \left(rx - r\frac{1}{K}x^2\right)' = r - \frac{2r}{K}x$, $f'(K) = r - \frac{2r}{K} \cdot K = r - 2r = -r$

$$rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \approx 0 - r(x-K) = -r(x-K) = r(K-x)$$

   Poslední aproximaci je možno přepsat do tvaru

$$rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \approx rK\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

4. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $f(1) = \sqrt{1} = 1$, $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f'(1) = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{x} \approx 1 + \frac{1}{2}(x-1)$$

5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$, $f(1) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$, $f'(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$, $f'(1) = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \approx 1 - \frac{1}{2}(x-1)$$

## 3.4 Kinetika chemických reakcích pro malé koncentrace

Rychlost mnoha chemických reakcí je dána vzorcem

$$f(x) = \frac{ax}{b+x},$$

kde $x$ je koncentrace substrátu a $a$, $b$ jsou parametry (konstanty). Tento vzorec se nazývá kinetika Michaelise a Mentenové. Ukažte, že platí

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{ab}{(b+x)^2}.$$

Použijte tento výpočet k lineární aproximaci funkce

$$f(x) = \frac{ax}{b+x},$$

pro malá $x$.

---

*Řešení.*

Přímým dosazením dostáváme $f(0) = \frac{a0}{b+0} = 0$, $f'(0) = \frac{ab}{(b+0)^2} = \frac{ab}{b^2} = \frac{a}{b}$ a odsud

$$\frac{ax}{b+x} \approx 0 + \frac{a}{b}(x-0) = \frac{a}{b}x.$$

## 3.5 Lineární aproximace kvalifikovaným odhadem

Pokud je v součinu výraz, který je blízký nule, ovlivní tento výraz výsledný součin více, než zbylé součinitele. Postavíme toto pozorování na solidnější základy.

Ukažte, že pokud platí $f(x) = g(x)h(x)$ a $g(x_0) = 0 \neq h(x_0)$, má lineární aproximace funkce $g$ tvar

$$g(x) \approx g'(x_0)(x - x_0)$$

a lineární aproximace funkce $f$ tvar

$$f(x) \approx \Big[g'(x_0)(x-x_0)\Big]h(x_0),$$

kde v hranaté závorce je lineární aproximace funkce $g$ a tato aproximace je vynásobena hodnotou funkce $h$ v bodě $x_0$.

Situace je jednoduchá zejména v případě, kdy funkce $g$ je lineární a je sama svojí lineární aproximací. Ukažte, že s uvedenou výbavou je možno napsat lineární aproximace prvních tří funkcí z příkladu **??** přímo a bez výpočtu. Ukažte, že výpočet není nutný a výsledek se dá kvalifikovaně odhadnout i v předchozím příkladě s kinetikou Michaelise a Mentenové. Pro tyto účely použijte triviální identitu

$$\frac{ax}{b+x} = x\cdot\frac{a}{b+x}.$$

---

*Řešení.*

Obecný vzorec je

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

Vztah

$$g(x) \approx g'(x_0)(x-x_0)$$

z něj plyne okamžitě použitím funkce $g$ a podmínky $g(x_0)=0$.

Pro funkci $f(x)=g(x)h(x)$ v našem případě máme

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0)h(x_0) = 0\cdot h(x_0) = 0\\ f'(x_0) &= g'(x_0)h(x_0) + g(x_0)h'(x_0) = g'(x_0)h(x_0) + 0\cdot h'(x_0) = g'(x_0)h(x_0) \end{aligned}$$

a přímým dosazením

$$f(x) \approx 0 + g'(x_0)h(x_0)(x-x_0) = \Big[g'(x_0)(x-x_0)\Big]h(x_0)$$

1. Funkce $f(x)=xe^x$ má v $x=0$ první součinitel nulový a druhý součinitel nenulový a platí $e^0=1$. V okolí $x=0$ je první součinitel lineární. Proto v okolí $x=0$ platí

$$xe^x \approx xe^0 = x\cdot 1 = x.$$

2. Funkce $f(x)=rx\left(1-\frac{x}{K}\right)$ má v $x=0$ první součinitel $rx$ nulový a druhý součinitel $\left(1-\frac{x}{K}\right)$ nenulový a platí $\left(1-\frac{0}{K}\right)=1$. V okolí $x=0$ je první součinitel lineární a v okolí $x=0$ platí

$$rx\left(1-\frac{x}{K}\right) \approx rx\left(1-\frac{0}{K}\right) = rx.$$

3. Funkce $f(x)=rx\left(1-\frac{x}{K}\right)$ má v bodě $x=K$ první součinitel $rx$ nenulový roven $rK$ a druhý součinitel $\left(1-\frac{x}{K}\right)$ nulový. Druhý součinitel je lineární. Proto v okolí $x=K$ platí

$$rx\left(1-\frac{x}{K}\right) \approx rK\left(1-\frac{x}{K}\right) = r(K-x).$$

4. Funkce $f(x)=x\frac{a}{b+x}$ má v bodě $x=0$ první součinitel $x$ nulový a druhý součinitel $\frac{a}{b+x}$ nenulový a roven $\frac{a}{b}$. První součinitel je lineární. Proto v okolí $x=0$ platí

$$x\frac{a}{b+x} \approx x\frac{a}{b}.$$

## 3.6 Numerické derivování a závislost tepelné vodivosti mědi na teplotě

Tabulka udává závislost koeficientu tepelné vodivosti mědi na teplotě, $\lambda = \lambda(T)$. Odhadněte pomocí centrální diference derivaci funkce $\lambda$ pro $T = 400K$ (cca 127°C). Určete i fyzikální jednotku derivace $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T}$ a slovní interpretaci vypočtené hodnoty.

*Poznámka: Teplota v Kelvinech (termodynamická teplota) je teplota ve stupních Celsia posunutá tak, aby teplota* $-273{,}15\,°\mathrm{C}$ *odpovídala* $0\,\mathrm{K}$*. Dílky a tedy i změny teploty jsou na obou stupnicích identické.*

Tabulka 3.1: Zdroj: Cengel, Mass and heat transfer.

| $T/\mathrm{K}$ | $\lambda \big/ \mathrm{W/(m\,K)}$ |
|---|---|
| 200 | 413 |
| 400 | 393 |
| 600 | 379 |
| 800 | 366 |

---

*Řešení.*

Teploty jsou v ekvidistantních krocích po 200 kelvinech. Vezmeme od výchozí hodnoty 400 kelvinů nejbližší nižší (200 K) a nejbližší vyšší (600 K) teplotu, najdeme v tabulce odpovídající koeficienty tepelné vodivosti, rozdílem určíme změnu v tomto koeficientu a podílem přepočteme změnu na jeden Kelvin.

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T}(400) \approx \frac{(379-413)\mathrm{W/(m\,K)}}{2\cdot 200\mathrm{K}} = -0.085\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-2}}$$

Při teplotě $T = 400K$ hodnota koeficientu tepelné vodivosti s rostoucí teplotou klesá. S každým stupněm Celsia (s každým Kelvinem) nad danou teplotu klesne koeficient tepelné vodivosti o $0.085\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$.

Pokusíme se trošku slovně ilustrovat, co nám vlastně vyšlo. Při teplotě 400 K a teplotním gradientu jeden stupeň Celsia na metr délky prochází mědí tepelný výkon 393 wattů na metr čtvereční, tj. za sekundu se plochou metru čtverečního přenese 393 joulů. S každým stupněm Celsia navíc tato hodnota malinko poklesne: o 0.085 joulu. Odsud je patrné, že při změně teploty řádově o desítky stupňů se koeficent změní o malé jednotky procent a v těchto situacích nebude závislost na teplotě významná.

## 3.7 Iterační metoda

Úlohy s tepelnou bilancí (např. osluněná stěna) často vedou na rovnice obsahující čtvrtou mocninu a první mocninu neznámé veličiny. Toto je dáno tím, že vyzařování tepla souvisí podle Stefanova-Bolzmannova zákona se čtvrtou mocninou teploty a přenos tepla prouděním nebo vedením souvisí s první mocninou teploty. Koeficient u první mocniny bývá větší než u čtvrté mocniny, protože konstanta ze Stefanova-Bolzmannova zákona je velmi malá. Typickým představitelem by mohla být rovnice

$$x^4 - 8x + 6 = 0.$$

Napište iterační vzorec pro řešení této rovnice Newtonovou metodou a proveďte několik iterací s vhodnou celočíselnou počáteční aproximací. Poté porovnejte s postupem, kdy v rovnici osamostatníte $x$ z lineární části a z takové rovnice sestavíte iterační vzorec.

---

*Řešení.*

Newtonova metoda: Využitím funkčního předpisu $f(x) = x^4 - 8x + 6$ a derivace $f'(x) = 4x^3 - 8$ dostáváme iterační vzorec

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 8x_n + 6}{4x_n^3 - 8},$$

který konverguje velmi rychle.

| Iterace | Hodnota |
|---|---|
| $x_0$ | 1.000000000000000 |
| $x_1$ | 0.750000000000000 |
| $x_2$ | 0.800123762376238 |
| $x_3$ | 0.801613150991155 |
| $x_4$ | 0.801614587354561 |
| $x_5$ | 0.801614587355901 |
| $x_6$ | 0.801614587355901 |

Sage.

Ad hoc iterace: Rovnici převedeme na tvar

$$x = \frac{x^4 + 6}{8}$$

a zkusíme iterace

$$x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 6}{8}.$$

Konergenci pozorujeme, ale je pomalá.

| Iterace | Hodnota |
|---|---|
| $x_0$ | 1.000000000000000 |
| $x_1$ | 0.875000000000000 |
| $x_2$ | 0.823272705078125 |
| $x_3$ | 0.807422868167514 |
| $x_4$ | 0.803126865733812 |
| $x_5$ | 0.802005182967586 |
| $x_6$ | 0.801715260030858 |

Sage.

# Kapitola 4

# Lokální extrémy

- Naučíme se hledat lokální extrémy funkce

## 4.1 Lokální extrémy bez slovního zadání

V úlohách z praxe často víme, že existuje optimální řešení a studovaná funkce má jediný bod s nulovou derivací. Pokud studujeme funkci bez jakéhokoliv kontextu, musíme posuzovat to, zda v daném bodě opravdu extrém je a jaký. Nejlépe tak, že současně určíme i intervaly monotonie. Za povšimnutí stojí, že při hledání bodů, kde jsou lokální extrémy, vlastně ani nemusíme znát původní funkci. Stačí nám o ní informace týkající se spojitosti a poté stačí znát derivaci. I s takovým případem se v praxi setkáváme.

Najděte lokální extrémy a intervaly monotonie následujících funkcí. Spolu s funkcí je zadána i její derivace.

1. $y = \frac{x}{(x+1)^2}$, $y' = \frac{1-x}{(x+1)^3}$
2. $y = \frac{x^2}{x+1}$, $y' = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$
3. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$, $y' = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$
4. $y = (5-x)\sqrt{x}$, $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(5-3x)$
5. $y = x^2e^{-x}$, $y' = -(x-2)xe^{-x}$
6. $y$ je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{2\}$,\ $y' = \frac{(x^2+3)(x^2-3)}{2-x}$

---

*Řešení.*

*1.* $y = \frac{x}{(x+1)^2}$, $y' = \frac{1-x}{(x+1)^3}$

Nulové body derivace jsou řešení rovnice

$$1 - x = 0.$$

Tato rovnice má jediné řešení

$$x = 1.$$

Body nespojitosti derivace jsou řešení rovnice

$$(x+1)^3 = 0.$$

Tato rovnice má jediné řešení

$$x = -1.$$

Body nespojitosti a nulové body rozdělí reálnou osu na tři podintervaly.

- Interval $(-\infty, -1)$. Dosazením reprezentanta $x = -2$ z tohoto intervalu máme

$$y'(-2) = \frac{1-(-2)}{(-2+1)^3} < 0$$

a proto je derivace na tomto intervalu záporná a funkce klesá.

- Interval $(-1, 1)$. Dosazením reprezentanta $x = 0$ z tohoto intervalu máme

$$y'(0) = \frac{1-0}{(0+1)^3} > 0$$

a proto je derivace na tomto intervalu kladná a funkce roste.

- Interval $(1, \infty)$. Dosazením reprezentanta $x = 2$ z tohoto intervalu máme

$$y'(2) = \frac{1-2}{(2+1)^3} < 0$$

a proto je derivace na tomto intervalu záporná a funkce klesá.

  V bodě $x = 1$ se monotonie funkce mění spojitě z klesající na rostoucí (nakreslete si schema) a funkce má lokální minimum.

  V bodě $x = -1$ se monotonie funkce mění z rostoucí na klesající, ale lokální extrém zde není, protože funkce ani její derivace v tomto bodě nejsou definovány.

*2.* $y = \frac{x^2}{x+1}$, $y' = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

Nulové body derivace jsou řešení rovnice

$$x(x+2) = 0.$$

Tato rovnice má dvě řešení

$$x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

Body nespojitosti derivace jsou řešení rovnice

$$(x+1)^2 = 0.$$

Tato rovnice má jediné řešení

$$x = -1.$$

Body nespojitosti a nulové body rozdělí reálnou osu na čtyři podintervaly.

- Interval $(-\infty, -2)$. Dosazením reprezentanta $x = -10$ z tohoto intervalu máme

$$y'(-10) = \frac{(-10)(-10+2)}{(\dots)^2} > 0$$

a proto je derivace na tomto intervalu kladná a funkce roste. Všimněte si, že jmenovatel je stále kladný a znaménko podílu nijak neovlivní.

- Interval $(-2, -1)$. Dosazením reprezentanta $x = -1.5$ z tohoto intervalu máme

$$y'(-1.5) = \frac{-1.5(-1.5+2)}{(\dots)^2} < 0$$

a proto je derivace na tomto intervalu záporná a funkce klesá.

- Interval $(-1, 0)$. Dosazením reprezentanta $x = -0.5$ z tohoto intervalu máme

$$y'(-0.5) = \frac{-0.5(-0.5+2)}{(\dots)^2} < 0$$

a proto je derivace na tomto intervalu záporná a funkce klesá.

- Interval $(0, \infty)$. Dosazením reprezentanta $x = 1$ z tohoto intervalu máme
$$y'(1) = \frac{1(1+2)}{(\dots)^2} > 0$$
a proto je derivace na tomto intervalu kladná a funkce roste.

V bodě $x = -2$ se monotonie funkce mění spojitě z rostoucí na klesající (nakreslete si schema) a funkce má v tomto bodě lokální maximum.

V bodě $x = 0$ se monotonie funkce mění spojitě z klesající na rostoucí (nakreslete si schema) a funkce má v tomto bodě lokální minimum.

V bodě $x = -1$ se monotonie funkce nemění. Navíc funkce v tomto bodě ani není definována a existenci lokálního extrému tedy ani neuvažujeme

*3.* $y = \frac{x^2}{x^2+1}$, $y' = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

Nulové body derivace jsou řešení rovnice
$$2x = 0.$$
Tato rovnice má jediné řešení
$$x = 0.$$

Body nespojitosti derivace jsou řešení rovnice
$$(x^2+1)^2 = 0.$$
Tato rovnice nemá v oboru reálných čísel žádné řešení.

Body nespojitosti nejsou a jeden nulový bod rozdělí reálnou osu na dva podintervaly. Z derivace je zřejmé, že derivace má stejné znaménko jako $x$, tj. derivace je záporná nalevo od nuly a kladná napravo od nuly. To znamená, že v nule se funkce mění z klesající na rostoucí a funkce má v tomto bodě lokální minimum.

## 4.2 Krabička z papíru

V každém rohu papíru A4 vystřihneme čtverec a zbylý papír podél stran poohýbáme nahoru, aby vznikla (až se to slepí) krabička bez horního víka. Jak velké čtverce musíme odstříhat, pokud chceme, aby výsledná krabička měla co největší objem?

*Toto je klasický příklad přítomný snad v každé učebnici diferenciálního počtu. Zajímavý je tím, že A4 má ve výuce zpravidla každý před sebou a může si tipnout, jaký očekává výsledek a kolik maximální objem bude. Pro odhad objemu si můžeme představit třeba litrovou krabici mléka a porovnávat s tímto referenčním kvádrem.*

---

*Řešení.* Papír A4 má rozměry $210 \times 297\,\mathrm{mm}$ a je-li vystřižený čtverec o straně $x$, má krabička rozměry $(210-2x) \times (297-2x) \times x$ a objem
$$V(x) = (210-2x)(297-2x)x = 4x^3 - 1014x^2 + 62370x.$$
Derivováním dostaneme
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 12x^2 - 2028x + 62370$$
a nulové body derivace jsou řešeními rovnice
$$12x^2 - 2028x + 62370 = 0.$$
Tato rovnice má pro naši úlohu jediné smysluplné řešení $x = 40.4$ (další řešení $x = 128.5$ neodpovídá realizovatelnému výrobku). Optimální krabička vznikne vystřižením čtverců o stranách $40.4\,\mathrm{mm}$. Objem je
$$V(40.4) = 1.12 \times 10^6\,\mathrm{mm}^3 = 1.12\,\mathrm{l}.$$

## 4.3 Plot ze tří stran pozemku

Chceme oplotit pozemek obdélníkového tvaru, jehož jedna strana je rovná přirozená hranice. Stavíme plot tedy jenom na zbylých třech stranách.

1. Jaký tvar pozemku zvolit, pokud je dána délka pletiva a chceme mít plochu pozemku co největší?
2. Jaký tvar pozemku zvolit, pokud je dána plocha pozemku a chceme mít co nejmenší spotřebu pletiva?

*Než začnete řešit, tak si zkuste tipnout jestli optimální je čtverec nebo obdélník. Pokud obdélník, tak zda podél přirozené hranice nebo kolmo na ni. Také si zkuste tipnout, zda je řešení obou úloh stejné (tj. stejný tvar obdélníku, například stejný poměr stran). Úlohy řešte s co nejmenším množstvím parametrů. Uvažujte tedy, že máte jednu délkovou jednotku pletiva v prvním případě a že chcete oplotit pozemek o jednotkovém obsahu v případě druhém.*

---

*Řešení.*

Obsah obdélníka o stranách $x$ a $y$ je součin délek dvou sousedních stran

$$S = xy$$

délka plotu bude délka strany podél hranice (např $x$) a dvojnásobek délky strany kolmé na hranici (např. $y$)

$$L = x + 2y$$

**Maximální plocha při daném obvodu.** Měřeno v násobcích délky plotu je $L = 1$ a ze vztahu

$$x + 2y = 1$$

dostaneme

$$x = 1 - 2y.$$

Potom platí

$$S = xy = (1 - 2y)y = y - 2y^2.$$

Derivací obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y} = 1 - 4y$$

a derivace je rovna nule pro $y = \frac{1}{4}$, tedy kratší strana je čtvrtina celkové délky plotu. Na delší strana tedy zbude polovina (dvakrát odkrojím čtvrtinu) a obdélník má poměr stran $2 : 1$.

*Minimální obvod při daném obsahu.* Měřeno v jednotkách, ve kterých je obsah $S$ roven jedné (tj. v násobcích délky strany čtverce o stejném obsahu jako náš obdélník) dostáváme ze vztahu

$$xy = 1$$

vztah

$$y = \frac{1}{x}.$$

Potom platí

$$L = x + 2y = x + \frac{2}{x} = x + 2x^{-1}$$

Derivací obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = 1 + 2(-1)x^{-2} = 1 - \frac{2}{x^2}$$

a derivace je rovna nule pro $x^2 = 2$, tj. pro $x = \sqrt{2}$ (uvažujeme jenom kladné hodnoty $x$). Ze vztahu $y = \frac{1}{x}$ dostáváme

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{2}$$

a kratší strana je polovinou délky delší strany. Jako v předchozím případě, obdélník má poměr stran $2 : 1$.

## 4.4 Optimální trám vyřezaný z kulatiny

Ukažte, že pro vyřezání nebo vytesání trámu o maximálním objemu z kulatiny válcového tvaru je nutné vyřezat trám se čtvercovým průřezem. Návod: Uvažujte válec, ze kterého chceme vyříznout hranol. Zvolte jako jednotku délky průměr kulatiny a hledejte maximum druhé mocniny obsahu průřezu. Zdůvodněte, že tento postup je korektní. Maximum paraboly najděte ze znalosti toho, že vrchol paraboly leží v polovině mezi kořeny.

Poté zopakujte předchozí úlohu pro maximum veličin $bh^2$ a $bh^3$, kde $h$ je výška a $b$ šířka průřezu trámu. V prvním případě maximalizujeme nosnost a ve druhém tuhost nosníku. Použijte stejný postup jako v minulé úloze, ale už nebude stačit najít vrchol paraboly. (Poznámka: Jedna z těchto funkcí se maximalizovala na přednášce a proto tento případ nemusíte dopočítávat.)

*Tento příklad je zajímavý spíše z aplikačního hlediska: nejvíce dřeva neznamená největší nosnost a nosník, který nejvíce unese, vychází jinak, než nosník, který se nejméně prohýbá.*

---

*Řešení.*

V jednotkách průměru platí $h^2 + b^2 = 1$ a mají se postupně maximalizovat funkce obsah $S = bh$, nosnost $N = bh^2$ a tuhost $T = bh^3$. Protože $b$ se pomocí $h$ vyjadřuje pomocí druhé odmocniny a naopak, bude výhodnější maximalizovat funkce, kde aspoň jedna mocnina je sudá. To je jenom u nosnosti, u obsahu a tuhosti si sudé mocniny vyrobíme umocněním na druhou a budeme dosazovat

$$b^2 = 1 - h^2,$$

tj.

$$\begin{aligned} S^2(h) &= b^2h^2 = (1-h^2)h^2, \\ N(b) &= b(1-b^2) = b - b^3, \\ T^2(h) &= b^2h^6 = (1-h^2)h^6 = h^6 - h^8. \end{aligned}$$

Postup je korektní, protože veličiny jsou kladné a funkce $y = x^2$ je pro kladné $x$ rostoucí. Proto bude veličina maximální tam, kde je maximální její druhá mocnina.

*Obsah:* Funkce $f(h) = (1-h^2)h^2$ je parabola v proměnné $h^2$ a proto má maximum pro $h^2 = \frac{1}{2}$ a $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Druhý rozměr vychází

$$b = \sqrt{1-h^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a trám má v tomto případě (maximalizujeme objem) průřez čtverce.

*Nosnost:* Funkce $f(b) = b - b^3$ má derivaci $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}b} = 1 - 3b^2$ a derivace je pro $b > 0$ nulová, jestliže $b^2 = \frac{1}{3}$, tj. $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Druhý rozměr vychází

$$h = \sqrt{1-b^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

a trám má v tomto případě (maximalizujeme nosnost) průřez obdélníka s poměrem stran $h : b = \sqrt{2} : 1$.

*Tuhost:* Funkci $f(h) = h^6 - h^8$ jsme maximalizovali na přednášce a trám má v tomto případě průřez obdélníka s poměrem stran $\sqrt{3} : 1$. Vskutku. Funkce $f(h) = h^6 - h^8$ má derivaci $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h} = 6h^5 - 8h^7 = 2h^5(3 - 4h^2)$ a derivace je pro $h > 0$ nulová, jestliže $h^2 = \frac{3}{4}$, tj. $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Druhý rozměr vychází

$$b = \sqrt{1-h^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

a trám má v tomto případě průřez obdélníka s poměrem stran $h : b = \sqrt{3} : 1$.

## 4.5 Ryba migrující proti proudu

Ryba ve vodě vydává za časovou jednotku energii úměrnou třetí mocnině rychlosti vzhledem k vodě. Pro překonání určité vzdálenosti proti proudu o rychlosti $v$ je proto potřeba energie

$$E = k\frac{1}{x}(x+v)^3,$$

kde $x$ je rychlost ryby vzhledem ke břehu a $x+v$ rychlost vzhledem k vodě. Najděte pro rybu optimální cestovní rychlost při migraci na dlouhé vzdálenosti, tj. rychlost, při které je minimalizován nutný energetický výdaj.

*Než začnete řešit, uvědomte si, že pokud měříme rychlosti v jednotkách rychlosti vody v řece, platí $v = 1$ a po vynechání konstanty $k$, která nemá vliv na polohu a kvalitu lokálních extrémů, hledáme lokální minimum funkce*

$$\frac{(x+1)^3}{x}$$

*Podle Stewart, Day: Biocalculus. Calculus for the life siences.*

---

*Řešení.*

Měřeno v násobcích rychlosti vody máme minimalizovat funkci

$$y = \frac{(x+1)^3}{x}.$$

Platí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3(x+1)^2 \cdot 1 \cdot x - (x+1)^3 \cdot 1}{x^2} = \frac{(x+1)^2(3x-(x+1))}{x^2} = \frac{(x+1)^2(2x-1)}{x^2}$$

Derivace je rovna nule pro $x = -1$ (ryba plave rychlostí stejnou jako voda, ale po proudu) a $x = \frac{1}{2}$ (ryba plave proti proudu takovou rychlostí, že její rychlost vzhledem k břehu je poloviční ve srovnání s rychlostí vody v protiproudu). Smysluplné je pouze řešení $x = \frac{1}{2}$ tj polovina rychlosti proudu. Například v proudu o rychlosti $20\,\mathrm{km\,hod^{-1}}$ ryba plave tak, že vzhledem k nehybnému pozorovateli na břehu plave rychlostí $10\,\mathrm{km\,hod^{-1}}$. Ve vodě tedy plave rychlostí $30\,\mathrm{km\,hod^{-1}}$, proud $20\,\mathrm{km\,hod^{-1}}$ ji strhává zpět a výsledná rychlost je $10\,\mathrm{km\,hod^{-1}}$

*Pozorování potvrdila, že migrující ryby "znají" řešení předchozího příkladu a proto plavou proti proudu rychlostí o polovinu větší než rychlost proudu. Vzhledem ke břehu je tedy jejich "cestovní rychlost proti proudu" poloviční jako je rychlost proudu. Mimo jiné, v rychlé vodě plavou rychle a v pomalejší pomaleji.*

*Příklad typu jaký jsme řešili u migrace ryb se ale ve skutečnosti často objevuje naopak. Například následovně.*

- *Pozorujeme specifické chování ryb. Někdo si to toho nevšímá, někdo to bere jako fakt, ale někomu to vrtá hlavou. Proč to tak je? Asi si přirozeně minimalizují energii.*
- *Jakou musíme učinit hypotézu aby tato hypotéza vedla k pozorovanému jevu? Jaká musí být souvislost energie s rychlostí, aby minimalizace energie vedla k tomu, co pozorujeme?*
- *Po nalezení odpovědi na předchozí otázku je přirozené předpokládat, že jsme našli podstatu jevu. Tedy třeba, že energie je úměrná třetí mocnině rychlosti. V tomto smyslu matematika zviditelnila neviditelné.*
- *Někdy je potřeba při konfrontaci s jinými pozorováními hypotézu poopravit, zpřesnit nebo bohužel zamítnout. To však je přirozené při poznávání světa.*

# Kapitola 5

# Integrály I

- Naučíme se hledat neurčitý integrál funkce. Stačí mít po ruce vzorce.
- Naučíme se hledat určitý integrál funkce.
- Procvičíme si interpretaci integrálu v kontextu změny veličiny, která se mění nekonstantní rychlostí.

## 5.1 Výpočet integrálu

Najděte následující integrály.

1. $\int x^2 + 2x\mathrm{d}x$
2. $\int \sqrt{x}\Big(x + \sqrt{x}\Big)\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\mathrm{d}x$
4. $\int \frac{x^2-1}{x}\mathrm{d}x$
5. $\int e^x + e^{2x}\mathrm{d}x$
6. $\int \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x$
7. $\int \frac{1}{4x^2}\mathrm{d}x$
8. $\int \frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x$
9. $\int \frac{1}{1+4x^2}\mathrm{d}x$
10. $\int \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^6}\,\mathrm{d}r$
11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x$
12. $\int_0^1 (x-1)^3\mathrm{d}x$
13. $\int_{-1}^1 3x^2 + x^5\mathrm{d}x$
14. $\int_0^{10} e^{-0.1t}\,\mathrm{d}t$
15. $\int_{-a}^{a} u^3\,\mathrm{d}u$

---

*Řešení.*

Používáme vzorce $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$, $\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax} + c$ a dále linearitu (integrál zachovává součet a konstantní násobek)

1. $\int x^2 + 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + c$
2. $\int \sqrt{x}(x+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int x\sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}} + x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^2 + c$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

4. $\int \frac{x^2-1}{x}\,\mathrm{d}x = \int x - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + C$
5. $\int e^x + e^{2x}\,\mathrm{d}x = e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + c$
6. $\int \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C$
7. $\int \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(-1)x^{-1} = -\frac{1}{4x} + c$
8. $\int \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$
9. $\int \frac{1}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + C$
10. $\int \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^6}\,\mathrm{d}r = \int r^{-2} - r^{-6}\,\mathrm{d}r = (-1)r^{-1} + \frac{1}{5}r^{-5} = -\frac{1}{r} + \frac{1}{5r^5} + c$
11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$
12. $\int_0^1 (x-1)^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}(x-1)^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}(1-1)^4 - \frac{1}{4}(0-1)^4 = -\frac{1}{4}$
13. $\int_{-1}^1 3x^2 + x^5\,\mathrm{d}x = \left[x^3 + \frac{1}{6}x^6\right]_{-1}^1 = \left(1^3 + \frac{1}{6}1^6\right) - \left((-1)^3 + \frac{1}{6}(-1)^6\right) = 2$
14. $\int_0^{10} e^{-0.1t}\,\mathrm{d}t = \left[-10e^{-0.1t}\right]_0^{10} = -10e^{-0.1\times 10} - \left(-10e^{-0.1\times 0}\right) = -10e^{-1} + 10$
15. $\int_{-a}^a u^3\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{4}u^4\right]_{-a}^a = \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{4}(-a)^4 = 0$

## 5.2 Vytékání oleje

Najděte slovní interpretaci integrálu

$$\int_0^{10} r(t)\mathrm{d}t,$$

kde $r(t)$ je rychlost s jakou vytéká olej z děravé nádrže (v litrech za hodinu) a $t$ je čas v hodinách. Vypočtěte integrál pro $r(t) = 200 - 4t$.

*Toto a další příklady jsou klasické aplikace integrálu, kdy integrálem rychlosti, s jakou se mění nějaká veličina, je změna této veličiny.*

---

*Řešení.* Integrál udává objem oleje, který vyteče za prvních 10 hodin. Pro zadanou funkci dostáváme

$$\int_0^{10} r(t)\mathrm{d}t = \int_0^{10} (200-4t)\mathrm{d}t = \left[200t - 2t^2\right]_0^{10} = 2000 - 200 - (0-0) = 1800.$$

Za 10 hodin vyteče 1800 litrů oleje.

## 5.3 Populace včel

Populace včel o počáteční velikosti 100 včel se rozmnožuje rychlostí $r(t)$. Najděte slovní interpretaci výrazů

$$\int_0^{15} r(t)\mathrm{d}t,$$

a

$$100 + \int_0^{15} r(t)\mathrm{d}t.$$

---

*Řešení.* První integrál značí přírůstek populace včel za patnáct jednotek času, druhý integrál značí celkovou velikost populace včel po uplynutí patnácti jednotek času. (Jednotky času nejsou v zadání specifikovány.)

## 5.4 Napouštění nádrže

Chemikálie teče do nádrže rychlostí $180 + 3t$ litrů za minutu, kde $t \in [0, 60]$ je čas v minutách. Určete, kolik chemikálie nateče do nádrže během prvních 20 minut.

(Podle Stewart: Calculus.)

---

*Řešení.*

Změna množství v nádrži je integrál rychlosti, tj.

$$\int_0^{20} (180 + 3t)\,\mathrm{d}t = 180 \times 20 + \left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^{20} = 4\,200\,\mathrm{l}.$$

## 5.5 Prasklá kanalizace

Prasklá kanalizace způsobila znečištění jezera v rekreační oblasti. Koncentrace bakterií $C(t)$ (v bakteriích na kubický centimetr, $t$ je čas ve dnech) se po ošetření úniku pro $t \in [0, 6]$ vyvíjí rychlostí

$$C'(t) = 10^3(t - 7).$$

Jaká je změna koncentrace bakterií mezi čtvrtým a šestým dnem?

(Podle Mardsen, Weinstein: Calculus I.)

---

*Řešení.*

Změna koncentrace je integrál z rychlosti s jakou se koncentrace mění, tj.

$$\int_4^6 10^3(t-7)\,\mathrm{d}t = \left[10^3\left(\frac{1}{2}t^2 - 7t\right)\right]_4^6 = -4000$$

a koncentrace poklesne o 4000 jednotek (bakterií na kubický centimetr).

## 5.6 Rychlost učení

Nechť $W(t)$ je počet francouzských slovíček, které se naučíme po $t$ minutách. Typicky může být (pro první dvě hodiny učení)

$$W(0) = 0 \quad \text{a} \quad W'(t) = \frac{4t}{100} - 3\left(\frac{t}{100}\right)^2.$$

Najděte pomocí integrálu funkci $W(t)$.

(Podle Mardsen, Weinstein: Calculus I.)

---

*Řešení.* Výsledná funkce integrálem rychlosti učení, tj.

$$W(t) = \int W'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{4t}{100} - 3\left(\frac{t}{100}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{2t^2}{100} - \frac{t^3}{10000} + C,$$

kde $C$ je integrační konstanta. Protože musí platit $W(0) = 0$, je $C = 0$ a proto

$$W(t) = \frac{2t^2}{100} - \frac{t^3}{10000}.$$

Jiné řešení je pomocí určitého integrálu najít změnu a poté přičíst k počáteční hodnotě. Aby nedošlo ke kolizi mezi označením integrační proměnné $t$ a mezi koncem časového intervalu, budeme tento konec časového intervalu označovat $T$. Tedy platí

$$w(T) = w(0) + \int_0^T w'(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^T \frac{4t}{100} - 3\left(\frac{t}{100}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{2T^2}{100} - \frac{T^3}{10000}.$$

Tedy

$$w(T) = \frac{2T^2}{100} - \frac{T^3}{10000}$$

a po přeznační proměnné máme stejný výsledek jako předešlým postupem.

## 5.7 Určení parametru tak, aby integrál měl zadanou hodnotu

V praktických úlohách je někdy situace, kdy integrujeme funkci s parametrem a hodnotu parametru je nutno doladit tak, aby integrál měl předem stanovenou hodnotu. Určete hodnotu reálného parametru $a$ tak, aby byl integrál

$$\int_0^{10} a\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

roven hodnotě 2019.

---

*Řešení.*

$$\int_0^{10} a\sqrt{x} = \left[a\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{10} = \frac{2a}{3}(10)^{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} 2019 &= \frac{2a}{3}(10)^{\frac{3}{2}} \\ a &= \frac{3}{2}2019(10)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

## 5.8 Práce na pružině

Síla působící na pružinu je úměrná deformaci pružiny. Natáhneme-li pružinu z rovnovážného stavu o hodnotu $x$, je nutno působit silou $kx$, kde $k$ je konstanta (tuhost pružiny). Vypočtěte práci nutnou k natažení pružiny z nedeformovaného stavu o jednotkovou délku a poté o délku $l$.

Po obecném výpočtu vypočtěte práci pro pružinu o zadané tuhosti $k$ a deformaci $\Delta x$. Výpočet proveďte určitým integrálem třikrát, postupně pro jednotku délky centimetr, decimetr a metr. Až po dokončení výpočtu převeďte na joule (newton krát metr).

$$k = 10\,\mathrm{N/cm} = 100\,\mathrm{N/dm} = 1000\,\mathrm{N/m}, \qquad \Delta x = 10\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{dm} = 0.1\,\mathrm{m}$$

*Všimněte si, že v každém případě se integruje jiná funkce a v jiných mezích. Protože však všechny výpočty charakterizují stejnou situaci, výsledky jsou po převedení na stejné jednotky stejné, což je očekávané. Změna* *jednotek je speciální případ substituce, kdy proměnnou podle které integrujeme nahradíme proměnnou jinou. Tuto metodu si pro integrál představíme na přednášce.*

---

*Řešení.*

Jednotková délka:

$$W = \int_0^1 F \,\mathrm{d}x = \int_0^1 kx \,\mathrm{d}x = \left[k\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}k - 0 = \frac{1}{2}k$$

Délka $l$:

$$W = \int_0^l F \,\mathrm{d}x = \int_0^l kx \,\mathrm{d}x = \left[k\frac{1}{2}x^2\right]_0^l = \frac{1}{2}kl^2 - 0 = \frac{1}{2}kl^2$$

Výpočet v centimetrech:

$$W = \int_0^{10} 10x \,\mathrm{d}x = \left[5x^2\right]_0^{10} = 5 \times 100 = 500\,\mathrm{Ncm} = 5\,\mathrm{Nm}$$

Výpočet v decimetrech:

$$W = \int_0^{1} 100x \,\mathrm{d}x = \left[50x^2\right]_0^{1} = 50\,\mathrm{Ndm} = 5\,\mathrm{Nm}$$

Výpočet v metrech:

$$W = \int_0^{0.1} 1000x \,\mathrm{d}x = \left[500x^2\right]_0^{0.1} = 500 \times 0.01\,\mathrm{Nm} = 5\,\mathrm{Nm}$$

# Kapitola 6

# Integrály II

## 6.1 Výpočet integrálu substitucí

Najděte následující integrály integrováním substituční metodou.

1. $\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$
2. $\int e^{-ax}\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$
4. $\int \sin x\cos^5 x\mathrm{d}x$
5. $\int \cos x\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x$

---

*Řešení.*

V integrované funkci se snažíme "rozšifrovat" součin složené funkce a derivace vnitřní složky. Pokud se to podaří, dáváme substituci takovou, že vnitřní složka složené funkce bude novou proměnnou. V prvním případě je složenou funkcí exponenciální funkce, která má vnitřní složku $x^2$. Derivace funkce $x^2$ je $2x$ a toto hledáme v součinu se složenou funkcí. Část s proměnnou $x$ vidíme na začátku integrované funkce. Dvojku ve funkci nemáme, ale to je naštěstí jenom multiplikativní konstanta s takovou konstantou si dokážeme poradit. Viz níže.

1. Integrál vypočteme substitucí
$$x^2 = t,$$
odkud plyne
$$2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$
a
$$x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t.$$
S touto substitucí dostáváme
$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^t\mathrm{d}t.$$
Nyní vypočítáme integrál v proměnné $t$ a odsud
$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

2. Integrál vypočteme substitucí
$$-ax = t,$$

odkud plyne
$$-a\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$
a
$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\mathrm{d}t.$$
S touto substitucí dostáváme
$$\int e^{-ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\int e^{t}\mathrm{d}t.$$
Nyní vypočítáme integrál v proměnné $t$ a odsud
$$\int e^{-ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}e^{t} = -\frac{1}{a}e^{-ax} + C.$$

3. Integrál vypočteme substitucí
$$x^2 + 1 = t,$$
odkud plyne
$$2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$
a
$$x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t.$$
S touto substitucí dostáváme
$$\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$
Nyní vypočítáme integrál v proměnné $t$ a odsud
$$\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

4. Integrál vypočteme substitucí
$$\cos x = t,$$
odkud plyne
$$-\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$
a
$$\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t.$$
S touto substitucí dostáváme
$$\int \sin x\cos^5 x\,\mathrm{d}x = -\int t^5\mathrm{d}t.$$
Nyní vypočítáme integrál v proměnné $t$ a odsud
$$\int \sin x\cos^5 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}t^6 = -\frac{1}{6}\cos^6 x + C.$$

5. Integrál vypočteme substitucí
$$\sin x = t,$$
odkud plyne
$$\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t.$$
S touto substitucí dostáváme
$$\int \cos x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$
Nyní vypočítáme integrál v proměnné $t$ a odsud
$$\int \cos x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}t^{3/2} = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Kontrola zde.

## 6.2 Střední hodnota funkce

Určete střední hodnotu funkce na zadaném intervalu.

1. funkce $\sqrt{x}$ na intervalu $[1, 4]$
2. funkce $\sin x$ na intervalu $[0, \pi]$
3. funkce $\sin x$ na intervalu $[0, 2\pi]$
4. funkce $ax^2$ na intervalu $[0, 1]$

V posledním příkladě určete hodnotu konstanty $a$ tak, aby střední hodnota byla rovna jedné.

## 6.3 Vedení tepla stěnou, lineární materiálové vztahy

Tok tepla v jedné dimenzi je dán Fourierovým zákonem

$$Q = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}.$$

Pro ustálené proudění je $Q$ konstantní. Pro homogenní materiál s lineární odezvou je výše uvedený vztah přesně lineární, tj. $k$ je konstanta. Určete tok tepla stěnou šířky $d$ oddělující prostory o teplotě $T_1$ a $T_2$.

---

*Řešení.*

Vztah

$$Q = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

udává derivaci teploty podle polohy ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{Q}{k}$$

a integrací na intervalu $x \in [0, d]$ dostáváme

$$T(d) - T(0) = \int_0^d -\frac{Q}{k}\,\mathrm{d}x = -\frac{Q}{k}\int_0^d \mathrm{d}x = -\frac{Q}{k}d.$$

Pro $T(0) = T_1$ a $T(d) = T_2$ dostáváme

$$T_2 - T_1 = -\frac{Q}{k}d$$

a odsud

$$Q = k\frac{T_1 - T_2}{d}$$

## 6.4 Vedení tepla stěnou, nelineární materiálové vztahy

Zopakujte předchozí výpočet pro materiál s nelineární materiálovou odezvou, kdy Fourierův zákon není lineární, tj. $k$ závisí na teplotě. Nejjednodušší zobecnění je případ, kdy $k(T)$ je lineární, tj. platí

$$k(T) = a + bT.$$

Použijte substituční metodu převádějící integrál $\int k(T(x))\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$ na integrál $\int k(T)\,\mathrm{d}T$. Použijte dále skutečnost, že střední hodnota lineární funkce je aritmetickým průměrem hodnot v krajních bodech intervalu.

Na tomto příkladě jsou zajímavé tři věci.

- Odvodíme vzorec používaný při posuzování tepelných ztrát.
- Přirozeně vychází vzorec, který po zavedení střední hodnoty funkce $k(T)$ splývá se vzorcem z předchozího příkladu, odvozeného pro konstantní vodivost.
- Nejzajímavější je fakt, že jsme substituční metodou vypočítali integrál funkce, kterou vlastně vůbec neznáme. Vskutku, neznáme teplotní profil $T(x)$ ve stěně a tím pádem neznáme ani závislost vodivosti $k(T(x))$ na poloze a ani gradient teploty. Přesto se podařilo integrál vypočítat. Teplotní profil se naučíme hledat jako řešení rovnice vedení tepla.

---

*Řešení.*

Stejně jako v předchozím příkladě, máme

$$k(T)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -Q$$

a integrací na intervalu $[0, d]$ dostáváme

$$\int_0^d k(T)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -Qd$$

a po substituci a označení $T(0) = T_1$, $T(d) = T_2$

$$\int_{T_1}^{T_2} k(T)\,\mathrm{d}T = -Qd.$$

S využitím střední hodnoty dostáváme

$$(T_2 - T_1)\frac{k(T_1) + k(T_2)}{2} = -Qd$$

a po výpočtu

$$Q = \frac{k(T_1) + k(T_2)}{2}\frac{T_1 - T_2}{d}.$$

## 6.5 Střední hodnota funkce dané tabulkou

Určete střední hodnotu koeficientu tepelné vodivosti $\lambda$ mědi na teplotním intervalu od 100 do 400 Kelvinů. Porovnejte výsledek s aritmetickým průměrem.

Pro výpočet na intervalu od 100 do 800 Kelvinů bychom museli integrovat na intervalu, na kterém nemáme rovnoměrně rozložené uzlové body. Navrhněte, jak v takovém případě postupovat a jak vypočítat $\int_{100}^{800} \lambda(T)\,\mathrm{d}T$

Tabulka 6.1: Zdroj: Cengel, Mass and heat transfer.

| $T/\mathrm{K}$ | $\lambda/(\mathrm{W}/(\mathrm{m\,K}))$ |
|---|---|
| 100 | 482 |
| 200 | 413 |
| 300 | 401 |
| 400 | 393 |
| 600 | 379 |
| 800 | 366 |

---

*Řešení.*

Integrál vypočteme lichoběžníkovým pravidlem

$$\int_{100}^{400} \lambda(T)\,\mathrm{d}T \approx \frac{100}{2}(482 + 2\times 413 + 2\times 401 + 393) = 125150$$

Střední hodnota na intervalu $[100, 400]$ je

$$\frac{1}{300}\int_{100}^{400} \lambda(T)\,\mathrm{d}T \approx 417$$

Aritmetický průměr je

$$\frac{482 + 413 + 401 + 393}{4} = 422.$$

Střední hodnota je vlastně (po dosazení lichoběžníkového pravidla)

$$\frac{482 + 2\times 413 + 2\times 401 + 393}{6}$$

a jedná se tedy o vážený průměr, kdy vnitřní body jsou započteny dvojnásobnou vahou.

Integrál na intervalu $[100, 800]$ vypočteme díky aditivitě vzhledem k integračnímu oboru

$$\int_{100}^{800} \lambda(T)\,\mathrm{d}T = \int_{100}^{400} \lambda(T)\,\mathrm{d}T + \int_{400}^{800} \lambda(T)\,\mathrm{d}T$$

a pro každý integrál máme data v ekvidistantních krocích a můžeme použít přímo lichoběžníkové pravidlo.

## 6.6 Růst populace a přežívání jedinců

Populace živočišného druhu činí 5600 jedinců a tato populace roste rychlostí

$$R(t) = 720e^{0.1t}$$

jedinců za rok. (V tomto čísle je zahrnuta přirozená natalita, mortalita a povolený lov.) Vlivem znečištění životního prostředí se však jedinci dožívají kratšího věku, než je zahrnuto v popsaném modelu. Zlomek populace, který přežije časový interval délky $t$, je

$$S(t) = e^{-0.2t}.$$

Odhadněte počet živočichů za 10 let a odhadněte, jaký by tento počet byl, kdyby k žádnému znečištění nedocházelo, tj. kdyby bylo $S(t) = 1$.

Napište jenom příslušné integrály a okomentujte, jakými metodami bychom je počítali. Vlastní výpočet provádět nemusíte.

*(Podle J. Stewart, T. Day: Biocalculus, Calculus for Life Sciences.)*

---

*Řešení.*

Nechť výchozí stav je rok $t = 0$.

Bez znečištění: Pokud je $N(t)$ počet jedinců po roce $t$, platí

$$N(10) = N(0) + \int_0^{10} R(t)\,\mathrm{d}t = 5600 + \int_0^{10} 720e^{0.1t}\,\mathrm{d}t = 5600 + \left[7200e^{0.1t}\right]_0^{10} \approx 18000,$$

kde integrál se dá vypočítat přímou integrací pomocí vzorce.

Se znečištěním: Jedinci, kteří jsou v populaci na začátku, musí přežít 10 let, to znamená, že se jejich počet sníží na $S(10)$-násobek. Jedinci, kteří se narodí v roce $t$ musí přežít $10 - t$ let a to znamená, že jejich počet se sníží na $S(10 - t)$-násobek. Toto snížení musíme započítat do předchozího modelu bez znečištění a dostaneme

$$\begin{aligned} N(10) = N(0)S(10) + \int_0^{10} R(t)S(10-t)\,\mathrm{d}t = \\ = 5600e^{-2} + \int_0^{10} 720e^{0.1t}e^{-0.2(10-t)}\,\mathrm{d}t \\ = 5600e^{-2} + 720e^{-2}\int_0^{10} e^{0.3t}\,\mathrm{d}t = \cdots = 7000, \end{aligned}$$

kde i tento integrál se dá vypočítat přímou integrací pomocí vzorce.

## 6.7 Rodičovské stromy

Při obnově lesů je nutné velké množství sadebního materiálu. Kromě školek hrají při obnově lesa důležitou roli rodičovské stromy. Plošná hustota semen (například v počtu semen na metr čtvereční) ve vzdálenosti $r$ od stromu je dána funkcí

$$D(r) = D_0 e^{-r^2/a^2}.$$

Pro vhodnou volbu jednotek dosáhneme toho, že platí $a = 1$. Pracujme proto s funkcí

$$D(r) = D_0 e^{-r^2}.$$

Určete množství semen uvnitř kruhu o poloměru $R$.

Napište jenom příslušný integrál a okomentujte, jakou metodou bychom ho počítali. Vlastní výpočet provádět nemusíte.

*(Volně přeformulováno podle L. Edestein–Keshet: Differential calculus for the life sciences. Příklad je použitelný pro stromy s velkými semeny, například dub. Pro jiné stromy musí semena sbírat stromolezci.)*

---

*Řešení.* Množství semen na metr čtvereční závisí na vzdálenosti od stromu, je to tedy podobná úloha jako úloha s prouděním tekutiny potrubím v přednášce. Postupujeme analogicky, jenom místo rychlosti tekutiny máme hustotu semen. Množství je součin hustoty a obsahu, $N = S \cdot D$. Protože $D$ není na celém obsahu konstantní, rozdělíme na části, kde konstantní je, a příspěvky sečteme, tj.

$$N = \sum_{kruh} D \cdot \Delta S.$$

Protože $D$ je funkce $r$, potřebujeme sčítat (integrovat) přes $r$. Proto kruh dělíme na mezikruží a přes tato mezikruží sčítáme, tj.

$$N = \sum_{kruh} D \frac{\Delta S}{\Delta r} \Delta r.$$

Limitním přechodem uděláme skok v součtu nekonečně malý a součet přejde na integrál, podíl změn přejde na derivaci, tj. dostaneme

$$N = \int_{kruh} D \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r.$$

Obsah $S = \pi r^2$ roste s poloměrem, $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\pi r$. Po dosazení této derivace a po dosazení za $D$ a vyjádření toho, co znamená integrál přes kruh o poloměru $R$ získáme integrál

$$N = \int_0^R D_0 e^{-r^2} 2\pi r\,\mathrm{d}r,$$

který můžeme vypočítat pomocí substituce $-r^2 = t$.

# Kapitola 7

# Diferenciální rovnice

*Umění najít řešení diferenciální rovnice je sympatické a naučíme se v úvodním příkladě. Není to však nic proti umění sestavit model (naučili jsme se již ve druhém týdnu a připomeneme si v následujícím příkladě s tloušťkou ledu), umění posoudit jednoznačnost řešení (většina modelů se řeší numericky a musíme být přesvědčeni o smysluplnosti takové činnosti) a stabilitu řešení (řešení, která nejsou stabilní, jsou sice v souladu s přírodními zákony, ale pravděpodobnost jejich spontánního výskytu je nulová). Jednoznačnost a zjednodušenou verzi stability řešení (stabilita konstantních řešení) jsme viděli na přednášce a připomeneme v dalších příkladech.*

## 7.1 Řešení ODE a IVP

1. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^2$
2. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = te^y$
3. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{y}$
4. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$
5. $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = kr^3, \quad r(0) = r_0 > 0$
6. $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2, \quad m(0) = 0$
7. $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2, \quad m(0) = -2$

---

*Řešení.*

1. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x \cdot y^2$
   - Konstantní řešení jsou řešení rovnice
     $$y^2 = 0,$$
     tj. je jediné konstantní řešení
     $$y = 0.$$
   - Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci
     $$y^{-2}\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x$$
     a integrováním
     $$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C.$$
2. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t \cdot e^y$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice
$$e^y = 0.$$
Protože tato rovnice nemá řešení, zadaná diferenciální rovnice nemá konstantní řešení.
- Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci
$$e^{-y}\mathrm{d}y = t\mathrm{d}t$$
a integrováním
$$-e^{-y} = \frac{1}{2}t^2 + C.$$

3. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x \cdot \sqrt{y}$
   - Konstantní řešení jsou řešení rovnice
   $$\sqrt{y} = 0,$$
   tj. jediné řešení
   $$y = 0.$$
   - Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci
   $$\frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x$$
   a integrováním
   $$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + C.$$
4. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$
   - Konstantní řešení
   $$y = 0$$
   (viz předchozí příklad) nesplňuje počáteční podmínku a proto jej nemusíme uvažovat
   - Obecné řešení
   $$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$
   dává po dosazení $x = 0$ a $y = 1$ rovnici
   $$2\sqrt{1} = 0 + C.$$
   Odsud dostáváme $C = 2$ a řešení zadané počáteční úlohy je
   $$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 2.$$
5. $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = k \cdot r^3, \quad r(0) = r_0 > 0$
   - Konstantní řešení jsou řešení rovnice
   $$r^3 = 0,$$
   tj. jediné konstantní řešení je
   $$r = 0$$
   a toto řešení nesplňuje počáteční podmínku.
   - Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci
   $$r^{-3}\mathrm{d}r = k\mathrm{d}t$$
   a integrováním
   $$-\frac{1}{2}r^{-2} = kt + C.$$

Dosazením počáteční podmínky $t = 0$, $r = r_0$ dostáváme

$$-\frac{1}{2}r_0^{-2} = C.$$

Tím je dána konstanta $C$ a po použití této konstanty v obecném řešení dostáváme řešení počáteční úlohy ve tvaru

$$-\frac{1}{2}r^{-2} = kt - \frac{1}{2}r_0^{-2}.$$

6. $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2$, $m(0) = 0$
   - Konstantní řešení jsou řešení rovnice
   $$m + 2 = 0,$$
   tj.
   $$m = -2$$
   a toto řešení nesplňuje počáteční podmínku.
   - Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci
   $$\frac{1}{m+2}\mathrm{d}m = dt$$
   a integrováním
   $$\ln|m + 2| = t + C.$$
   Po dosazení počáteční podmínky $t = m = 0$ dostáváme
   $$C = \ln 2$$
   a počáteční úloha má řešení
   $$\ln(m + 2) = t + \ln(2).$$
   (Vzhledem k počáteční podmínce je $m$ kladné a nemusíme psát absolutní hodnotu.)
7. $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2$, $m(0) = -2$
   - Konstantní řešení jsou řešení rovnice
   $$m + 2 = 0,$$
   tj.
   $$m = -2.$$
   Toto řešení splňuje počáteční podmínku.
   - Pravá strana má ohraničenou (dokonce konstantní) derivaci podle $m$. Proto je řešení každé počáteční úlohy určeno jednoznačně. Řešení z předchozího bodu je jediné a další nemusíme hledat.

## 7.2 Tloušťka ledu

Takzvaný Stefanův zákon (J. Stefan, "Uber die Theorie der Eisbildung, insbesondere "uber die Eisbildung im Polarmeere, 1891) vyjadřuje že tloušťka ledu na hladině moře roste ve stabilních podmínkách rychlostí nepřímo úměrnou této tloušťce. Zapište tento fakt pomocí vhodného matematického modelu a najděte řešení vzniklé diferenciální rovnice.

---

*Řešení.*

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{h}$$
$$h\,\mathrm{d}h = k\,\mathrm{d}t$$
$$\int h\,\mathrm{d}h = \int k\,\mathrm{d}t$$
$$\frac{h^2}{2} = kt + C$$

## 7.3 Model vypouštění nádrže

Z fyziky je známo, že rychlost s jakou vytéká tekutina otvorem u dna nádoby je úměrná odmocnině výšky hladiny (protože se mění potenciální energie úměrná výšce na kinetickou energii úměrnou druhé mocnině rychlosti). Proto je i rychlost s jakou se zmenšuje objem vody v nádrži úměrná odmocnině výšky hladiny.

Ukažte, že matematickým popisem procesu je diferenciální rovnice. Napište rovnici pro výšku hladiny vody v nádrži jako funkci času. Uvažujte tři případy: nádrž *cylindrického tvaru* (válec postavený na podstavu), nádrž ve tvaru *kvádru* a nádrž ve tvaru *kužele* otočeného vrcholem dolů (trychtýř).

*V tomto příkladě vystupuje derivace jak rychlost, ale po přepisu zadání do modelu máme v rovnici dvě různé veličiny, které se mění: objem vody a výšku hladiny. Musíme ještě najít a použít vztah mezi rychlostmi změn těchto veličin. Fyzikální zákon je formulován pro derivaci objemu a nás zajímá derivace výšky.*

---

*Řešení.*

Buď $V$ objem vody a $h$ výška hladiny od dna. Podle zadání ve všech případech platí

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -k_1\sqrt{h}$$

a musíme derivaci $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ vyjádřit pomocí $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$.

Pro cylindr, kvádr nebo jakoukoliv nádrž se svislými stěnami je objem úměrný výšce hladiny, $V = k_2 h$, a proto $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = k_2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$. Odsud

$$k_2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -k_1\sqrt{h},$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{k_1}{k_2}\sqrt{h}$$

a pro $k = \frac{k_1}{k_2}$ má model tvar

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{h}.$$

Pro kužel platí díky konstantnímu úhlu u vrcholu vztah $V = k_3 h^3$ (díky podobnosti je objem přímo úměrný třetí mocnině libovolného délkového parametru) a proto $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = k_3 \times 3h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$. Odsud

$$3k_3h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -k_1\sqrt{h},$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{k_1}{3k_3}h^{-3/2}$$

a po přeznačení konstanty má model pro kuželovou nádrž tvar

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -kh^{-3/2}.$$

## 7.4 Problematika jednoznačnosti v modelu vypouštění nádrže

Dříve jsme odvodili rovnici

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{h}$$

popisující úbytek hladiny vody v nádrži tvaru kvádru, ze které vypouštíme vodu.

1. Zkontrolujte, že pro $h > 0$ má každá počáteční úloha jediné řešení. Interpretujte tento výsledek prakticky.
2. Pro $h = 0$ by řešení nemuselo být určeno jednoznačně. A opravdu není. Řešením je například $h(t) = 0$ nebo
$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}k^2t^2 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0. \end{cases}$$
Zkontrolujte dosazením (pozor: pro $t < 0$ platí $\sqrt{t^2} = |t| = -t$) a rozmyslete, jestli nejednoznačnost je jenom matematický trik, nebo jestli má fyzikální interpretaci.

---

*Řešení.*

Ad 1: Nabídneme dvě varianty, pro argumentaci je možno použít kteroukoliv z nich.

- *Podle obecné věty o jednoznačnosti:* Stačí ověřit, že pravá strana má ohraničenou parciální derivaci podle $h$. Protože platí
$$\frac{\partial}{\partial h}(k\sqrt{h}) = k\frac{1}{2}h^{-1/2} = \frac{k}{2\sqrt{h}}$$
a tato derivace je definovaná a ohraničená v nějakém okolí libovolného bodu splňujícího $h > 0$. Podle věty o existenci a jednoznačnosti řešení obecné diferenciální rovnice má počáteční úloha právě jedno řešení.
- *Podle věty o jednoznačnosti pro rovnici se separovanými proměnnými:* Stačí ověřit, že část závislá na $h$ je nenulová. Toto jistě platí, protože pro $h > 0$ je $\sqrt{h} \neq 0$.

Pokud je tedy v nádrži nějaká voda, je jednoznačně dáno, jak bude vytékat a je možné vypočítat, jaká bude v libovolném okamžiku hladina.

Ad 2: Pro $h = \frac{1}{4}k^2t^2$ a $t < 0$ dostáváme
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{4}k^2 \cdot 2t = \frac{1}{2}k^2t \\ -k\sqrt{h} &= -k\sqrt{\frac{1}{4}k^2t^2} = -k\frac{1}{2}|k| \cdot |t| = -k\frac{1}{2}k(-t) = \frac{1}{2}k^2t \end{aligned}$$
a obě strany rovnice jsou stejné. Pro $h = 0$ je dosazení triviální.

Je-li $h(t_0) = 0$, může to být proto, že voda v čase $t_0$ právě vytekla, nebo proto, že vytekla před hodinou nebo proto, že v nádrži nikdy voda nebyla. Proto je nejednoznačnost přirozená. Například $h(t) = 0$ je řešení odpovídající tomu, že voda v nádrži nikdy nebyla. Funkce $h(t) = \frac{1}{4}k^2t^2$ pro $t < 0$ odpovídá tomu, že pro $t < 0$ v nádrži voda byla a vytekla v čase $t = 0$.

## 7.5 Stavebniny vedle čebínského nádraží: model

Hromada sypkého materiálu má tvar kužele. Úhel u vrcholu je konstantní, daný mechanickými vlastnostmi materiálu a je nezávislý na objemu. Předpokládejme, že personál stavebnin přisypává na hromadu materiál konstantní rychlostí (v jednotkách objemu za jednotku času). Tato hromada je však v poměrně otevřené krajině a vítr rozfoukává materiál po okolí. Je rozumné předpokládat, že rozfoukávání (opět v jednotkách objemu za jednotku času) se děje rychlostí úměrnou povrchu návětrné strany pláště. Vyjádřete proces kvantitativně pomocí derivací. Napište rovnici pro derivaci objemu hromady podle času.

*Toto je podobný model jako model vypouštění nádrže, ale kratší. Opět máme po přepisu zadání do matematického modelu dvě veličiny měnící se s časem v jedné rovnici. Derivace objemu, která nás zajímá, již v rovnici přítomna naštěstí je. Stačí vyjádřit obsah pomocí objemu, nejlépe pomocí rozměrové analýzy.*

---

*Řešení.*

Rychlost s jakou se mění objem je $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$, rychlost přisypávání označme $R$, povrch návětrné strany $S$. Podle zadání platí
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = R - k_0 S.$$
Protože kužel má stále stejný tvar, objem jednoznačně determinuje rozměry, povrch kužele, nebo i povrch poloviny pláště, tj. povrch návětrné strany. Z rozměrové analýzy na základě Buckinghamova Pi-teorému z přednášky je zřejmé, že musí platit úměrnost mezi takovými mocninami těchto veličin, pro které jednotky “pasují”, Existuje tedy konstanta taková, že
$$S = k_1 V^{\frac{2}{3}}.$$
Spojením těchto dvou vztahů dostáváme
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = R - kV^{\frac{2}{3}},$$
kde $r$ a $k = k_0 k_1$ jsou konstanty.

## 7.6 Stavebniny vedle čebínského nádraží: stabilita řešení

Hromada sypkého materiálu má tvar kužele. Úhel u vrcholu je konstantní, daný mechanickými vlastnostmi materiálu a je nezávislý na objemu. V předchozím příkladě jsme sestavili diferenciální rovnici popisující růst hromady ve tvaru
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = R - kV^{\frac{2}{3}},$$
kde $R$ je rychlost přisypávání a $k$ konstanta.

1. Existuje konstantní řešení? Pokud ano, je stabilní nebo nestabilní? Zdůvodněte.
2. Může hromada skončit i při neustálém přisypávání celá rozfoukaná?
3. Mohou pracovníci navršit hromadu do libovolné výšky anebo pro velkou hromadu je již rozfoukávání rychlejší než přisypávání?

---

*Řešení.*

Označme $f(V) = R - kV^{\frac{2}{3}}$. Konstantní řešení je řešením rovnice $f(V) = 0$, tj.
$$R - kV^{\frac{2}{3}} = 0.$$
Odsud
$$V_0 = \left(\frac{R}{k}\right)^{3/2}.$$
Protože $f$ klesá v bodě $V_0$, je toto řešení stabilní.

Protože $f(0) > 0$, malá hromada vždy roste a proto nemůže skončit celá rozfoukaná. Pro malý objem je přisypávání intenzivnější než rozfoukávání.

Protože $f$ je pro velké $V$ záporná, pro velkou hromadu objem ubývá (více se rozfouká než přisype) a hromadu není možné navršit libovolně velkou.

# Kapitola 8

# Matice

## 8.1 Násobení matic

Vynásobte matice $A$ a $B$ pro obě pořadí násobení.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vynásobte matice $B$ a $C$ pro obě pořadí násobení, je-li

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

*V tomto příkladě si vyzkoušíme násobení matic a kromě toho uvidíme, že násobení diagonální maticí je v jistém smyslu jednoduché. Podle toho, v jakém pořadí násobíme matice, se diagonálními prvky se násobí řádky nebo sloupce druhé matice.*

---

*Řešení.*

S rozepsáním pomocí lineárních kombinací vektorů tvořených sloupci matice $A$ dostáváme

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Odsud dostáváme

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 13 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Jinou metodou, s podrobným rozepsáním pomocí skalárního součinu řádků první matice a sloupců druhé matice dostáváme

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\times 2 - 2\times(-1) + 3\times 0 & 1\times(-2) - 2\times 2 + 3\times 1 & 1\times 2 - 2\times(-1) + 3\times 3 \\ 0\times 2 + 1\times(-1) + 0\times 0 & 0\times(-2) + 1\times 2 + 0\times 1 & 0\times 2 + 1\times(-1) + 0\times 3 \\ 1\times 2 + 2\times(-1) - 2\times 0 & 1\times(-2) + 2\times 2 - 2\times 1 & 1\times 2 + 2\times(-1) - 2\times 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & -3 & 13 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Poté již stručněji (rozepište si sami)

$$
BA = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -6 \end{pmatrix} \quad BC = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 \\ -1 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & 12 \end{pmatrix} \quad CB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}.
$$

V případě součinů s diagonální maticí se diagonálními prvky násobí odpovídající řádky nebo sloupce matice, podle toho, v jakém pořadí součin uvažujeme.

## 8.2 Soustava rovnic jako násobení matic

Zapište soustavu rovnic pomocí maticového násobení

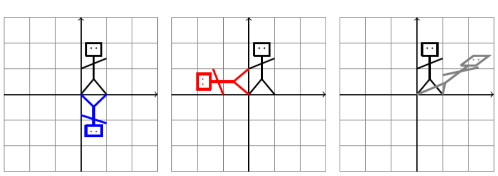
$$
\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 12 \\
2x_1 + \phantom{3}x_2 + \phantom{2}x_3 &= 21 \\
-x_1 + 3x_2 + \phantom{2}x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

---

*Řešení.*

$$
\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

## 8.3 Timmyho transformace



Figurka na obrázku je Timmy ve třech situacích. Jednou se pozoruje svůj obraz ve vodě, jednou spadl na záda, a jednou vrhá stín. Vyjádřete pomocí matice transformaci, která vzor (černá malůvka) převádí na obraz (barevná malůvka).

Poznámka: Stačí si všímat, kam se zobrazují jednotkové vektory ve směru os, tj. kam se zobrazí Timmiho nakročená noha a Timyho ruka, která je natažená dozadu. Případné neceločíselné složky matice jenom odhadněte. *Podle LAFF Linear Algebra - Foundations to Frontiers (www.ulaff.net)*

---

*Řešení.*

Nakročená noha je v bodě $(1, 0)$ a tento bod se transformuje sám na sebe pro krajní obrázky a na bod $(0, 1)$ pro prostřední obrázek. Tím je dán první sloupec matice zobrazení. Ruka natažená dozadu je v bodě $(0, 1)$ a u modrého Timmyho se transformuje (odhadem) na $(0, -0.8)$, u červeného Timmyho na $(-1, 0)$ a u šedého Timmyho (odhadem) na $(1, 0.8)$. Matice jsou postupně

$$M_{\text{modrá}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{pmatrix}, \quad M_{\text{červená}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{\text{šedá}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

## 8.4 Matice rotace

Matice rotace o úhel $\theta$ v kladném smyslu je

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Násobením ověřte, že matice otočení o úhel $-\theta$ je k této matici inverzní.

*Návod:* Funkce kosinus je sudá funkce a funkce sinus je lichá funkce. Proto platí

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \text{a} \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta.$$

*Matice rotace je důležitá v aplikacích zabývajících se deformacemi, protože umožní odfiltrovat tu část změny polohy referenčních bodů, která je způsobena rotací a nepřispívá tedy ke změně tvaru tělesa.*

---

*Řešení.*

Při zkratce $S = \sin\theta$ a $C = \cos\theta$ platí

$$R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix}$$

a potom

$$R_\theta R_{-\theta} = \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 + S^2 & CS - SC \\ SC - CS & S^2 + C^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde jsme využili identitu

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

## 8.5 Matice posunutí

Transformace pomocí násobení matic zachovává počátek a nemůže proto charakterizovat například posunutí roviny. Pokud chceme mít pomocí maticového násobení realizováno i posunutí, musíme zavést homogenní souřadnice a ztotožnit bod $(x, y)$ s vektorem $(x, y, 1)^T$. Ukažte, že matice

$$P_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice posunutí o $a$ doprava a $b$ nahoru. Odhadněte, jak bude vypadat matice popisující opačnou transformaci a pro jedno nějaké pořadí součinu ověřte, že součin těchto matic je jednotková matice.

---

*Řešení.*

Platí

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+a\\ y+b\\ 1\end{pmatrix}$$

a vidíme, že k souřadnici $x$ se přičítá $a$ a k souřadnici $y$ se přičítá $b$. Inverzní zobrazení bude posunutí o $a$ doleva a o $b$ dolů, tj.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -a\\ 0 & 1 & -b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Přímým výpočtem vidíme, že platí

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -a\\ 0 & 1 & -b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

## 8.6 Matice, zachovávající význačné směry

Dřevo má tři výrazné směry a pokud máme možnost zvolit souřadnou soustavu tak, aby tyto směry byly dány vektory $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$ a $(0,0,1)^T$, formulace fyzikálních zákonů se zjednoduší. Nyní si ukážeme proč. Najděte

1. nejobecnější matici $3\times 3$, která zachovává směr vektoru $(1,0,0)^T$,
2. nejobecnější symetrickou matici $3\times 3$, která zachovává směr vektoru $(1,0,0)^T$,
3. nejobecnější symetrickou matici $3\times 3$, která zachovává směr vektorů $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$.

*V tomto příkladě uvidíme, že matice zachovávající směr os souřadnic jsou v určitém smyslu pěkné.*

---

*Řešení.*

ad 1.

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ d\\ g\end{pmatrix}$$

a vektory $(1,0,0)^T$ a $(a,d,g)^T$ musí mít stejný směr. Proto $d=g=0$ a nejobecnější matice s danou vlastností je matice, která ve druhém a třetím řádku začíná nulou.

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & e & f\\ 0 & h & i\end{pmatrix}$$

ad 2. Jako minulý případ, ale aby byla matice symetrická, musí být také $b=c=0$, a $h=f$ tj.

$$\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & e & f\\ 0 & f & i\end{pmatrix}.$$

ad 3. Jako minulý případ, ale ještě se musí zachovávat směry vektorů $(0,1,0)^T$ a $(0,0,1)^T$. Platí

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ f \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ i \end{pmatrix}$$

a aby vzor a obraz měly stejný směr, musí být $f = 0$. Nejobecnější symetrická matice, která zachovává směr všech tří základních bázových vektorů je matice, která má mimo hlavní diagonálu nuly.

## 8.7 Matice derivování

Ukažte, že matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ je matice derivování polynomů stupně nejvýše 2, pokud polynom $ax^2 + bx + c$ ztotožníme s vektorem $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Vysvětlete, jak bychom interpretovali matici $A^2$ a $A^3$ a tyto matice vypočtěte.

*Návod: je možné ukázat buď pro obecný polynom $ax^2 + bx + c$, nebo samostatně pro polynomy $x^2$, $x$ a 1 a poté si všimnout, že ostatní polynomy můžeme dostat lineárními kombinacemi a maticová násobení tyto l ineární kombinace nepokazí díky tomu, že je distributivní a komutuje při násobení s konstantou. V tomto příkladě mimo jiné vidíme, že mocnina nenulové matice může být nula. To je efekt, který nemá obdobu u násobení reálných čísel.*

---

*Řešení.* Polynom $x^2$ má derivaci $2x$, tj. v označení pomocí vektorů se musí vektor $(1,0,0)^T$ zobrazit na $(0,2,0)^T$. Toto snadno ukážeme, že platí, protože se vlastně jedná o první sloupec matice $A$. Podobně, polynom $x$ má derivaci 1 a polynom 1 má derivaci 0, tj. v označení pomocí vektorů se musí vektory $(0,1,0)^T$ a $(0,0,1)^T$ zobrazit na $(0,0,1)^T$ a $(0,0,0)^T$. Opět vidíme snadno, že pro naši matici $A$ platí (dostáváme vlastně druhý a třetí sloupec matice $A$).

Protože libovolný polynom druhého stupně dostaneme pomocí lineárních kombinací výše uvedených vektorů a protože tyto lineární kombinace zůstanou při maticovém násobení zachovány, je při výše definovaném zobrazení obrazem libovolného polynomu druhého stupně jeho derivace.

Pro obecný polynom $ax^2 + bx + c$ s derivací $2ax + b$ vidíme, že obrazem vektoru $(a,b,c)^T$ musí být $(0,2a,b)^T$, což matice $A$ opět (po krátkém výpočtu) splňuje.

Matice $A^2$ je druhá derivace a $A^3$ třetí derivace a mají tvar

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 8.8 Matice projekce

Matice $P = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix}$ reprezentuje kolmou projekci na přímku, která jde počátkem soustavy souřadnic a svírá s kladnou částí osy $x$ úhel $\alpha$.

1. Ukažte, že platí $P^2 = P$.
2. Ukažte, (nemusíte výpočtem, například graficky, nebo využitím toho, že každý bod přímky se zobrazí sám na sebe) že dva různé body se projekcí mohou zobrazit na stejný bod a proto není naděje na to mít inverzní zobrazení. Proto neexistuje inverzní matice.

*Řešení.*

Pro $C = \cos\alpha$ a $S = \sin\alpha$ dostáváme

$$\begin{aligned} P^2 &= \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^4 + C^2S^2 & C^3S + CS^3 \\ C^3S + CS^3 & C^2S^2 + S^4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C^2(C^2+S^2) & CS(C^2+S^2) \\ CS(C^2+S^2) & S^2(C^2+S^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix} = P \end{aligned}$$

Evidentně jakýkoliv bod mimo přímku projekce a jeho obraz jsou dva různé body, které mají stejný obraz. Proto nemůže existovat inverzní zobrazení.

Pro determinant platí

$$|P| = \begin{vmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{vmatrix} = C^2S^2 - (CS)(CS) = C^2S^2 - C^2S^2 = 0$$

a tento výpočet potvrzuje, že neexistuje inverzní matice.

# Kapitola 9

# Determinanty, soustavy rovnic

## 9.1 Určete následující determinanty

1. $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$
2. $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ x-4 & y-3 \end{vmatrix}$ ($D_2 = 0$ je přímka daná bodem $(4,3)$ a směrovým vektorem $(2,-1)$)
3. $D_3 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ (charakteristický polynom matice z prvního bodu)
4. $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
5. $D_5 = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
6. $D_6 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix}$ (charakteristický polynom diagonální matice)

---

*Řešení.*

$$\begin{aligned}
D_1 &= 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 6 + 4 = 10 \\
D_2 &= 2 \cdot (y-3) - (-1) \cdot (x-4) = 2y - 6 + x - 4 = x + 2y - 10 \\
D_3 &= (2-\lambda) \cdot (3-\lambda) - (-1) \cdot 4 = \lambda^2 - 5\lambda + 10 \\
D_4 &= 12 \\
D_5 &= 7a + 5 \\
D_6 &= (2-\lambda)(3-\lambda)(7-\lambda)
\end{aligned}$$

## 9.2 Soustava lineárních rovnic s jediným řešením

Vyřešte soustavu rovnic.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Soustava rovnic je asi nejdůležitější aplikace lineární algebry, ale v dnešním světě není důvod ji řešit ručně. Je však užitečné si alespoň základní manipulace vyzkoušet na jednoduchém příkladě. Tento moc času nezabere.

## 9.3 Soustava lineárních rovnic s nekonečně mnoha řešeními

Vyřešte soustavu rovnic.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Soustava s nekonečně mnoha řešeními typicky vychází při hledání vlastních čísel matice. Na tomto příkladě si osaháme případ homogenní soustavy a jednoparametrického řešení, tj. případ, který při výpočtu vlastních vektorů vychází nejčastěji.*

# Kapitola 10

# Vlastní čísla a směry

## 10.1 Vektor, který není vlastním směrem

Ukažte, že vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ není vlastním směrem matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

---

*Řešení.*

Pomocí maticového násobení vidíme, že platí

$$A\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Výsledkem zobrazení vektoru pomocí matice je vektor který není násobkem původního vektoru (podle první komponenty by se muselo jednat o trojnásobek, ale to nekoresponduje s druhou komponentou) a proto se nejedná o vlastní vektor matice.

## 10.2 Vektor, který je vlastním směrem

Ukažte, že vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ je vlastním směrem matice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a určete příslušné vlastní číslo

---

*Řešení.*

Pomocí maticového násobení vidíme, že platí

$$A\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Výsledkem zobrazení vektoru $\vec{a}$ pomocí matice je vektor $\begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}$, který je šestinásobkem původního vektoru $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Protože je obraz násobkem vzoru, jedná se o vlastní vektor matice. Příslušné vlastní číslo je 6, protože se vektor zobrazuje na svůj šestinásobek.

## 10.3 Vlastní čísla a vektory matice $2 \times 2$

Najděte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a jim příslušné vlastní vektory.

---

*Řešení.*

Vlastní čísla jsou nulovými body determinantu

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda) - (2)(2) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3).$$

**Vlastní číslo $\lambda_1 = 2$.** Protože platí

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která má nekonečně mnoho řešení. Musíme najít alespoň jendo nenulové řešení. Pokud zapíšeme jako soustavu rovnic, dostáváme druhou rovnici ve tvaru

$$2x_1 - x_2 = 0$$

a první rovnice je jejím násobkem. Volbou $x_1 = 1$ dostáváme $x_2 = 2x_1 = 2$ a vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$ je $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tento vektor je dán jednoznačně až na nenulový konstantní násobek.

**Vlastní číslo $\lambda_2 = -3$.** Protože platí

$$A - (-3)I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která má nekonečně mnoho řešení. Musíme najít alespoň jendo nenulové řešení. Pokud zapíšeme jako soustavu rovnic, dostáváme první rovnici ve tvaru

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

a druhá rovnice je jejím násobkem. Volbou $x_2 = 1$ dostáváme $x_1 = -2x_2 = -2$ a vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = -3$ je $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tento vektor je dán jednoznačně až na nenulový konstantní násobek.

## 10.4 Transformace matice $2 \times 2$ na diagonální tvar

Uvažujme symetrickou matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Určete vlastní čísla a jednotkové vlastní vektory této matice.
2. Sestavte matici $P$ tak, aby ve sloupcích obsahovala jednotkové vlastní vektory. Pokud je to možné, napište matici $P$ tak, aby její determinant byl kladný.
3. Ověřte, že $P^T AP = D$ je diagonální matice.

*Návod: Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.*

---

*Řešení.*

Charakteristický polynom je

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2)$$

a vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 4$. Protože platí

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

je vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě $\lambda_1$ řešením soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

To je vlastně dvakrát zopakovaná rovnice

$$x_1 + x_2 = 0,$$

která má řešení například $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$. Protože délka vektoru $(1, -1)$ je $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, jednotkový vlastní vektor je $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$. Podobně by se dal najít jednotkový vlastní vektor příslušný druhé vlastní hodnotě, ale protože oba vektory musí být na sebe kolmé, stačí vzít jednotkový vektor, který je k $e_1$ kolmý, například $e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$. Matici $P$ můžeme vzít s $e_1$ v prvním a $e_2$ druhém sloupci, tj.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Rychlý výpočet ukazuje, že matice $P$ má determinant roven jedné. Kdyby vyšel roven minus jedné, stačí prohodit sloupce nebo jeden sloupec vynásobit faktorem $-1$.

Pokud ještě před násobením matic vytkneme opakující se faktor z obou matic, násobením dostáváme

$$\begin{aligned} P^T AP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podle očekávání vyšla diagonální matice s vlastními hodnotami v hlavní diagonále.

## 10.5 Poměr délky vzoru a obrazu vektoru

Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

z minulého příkladu a vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

určete podíl délky obrazu $A\vec{u}$ a vzoru $\vec{u}$ při zobrazení pomocí matice $A$. Ověřte, že tento podíl leží mezi menší a větší vlastní hodnotou, které jsme vypočítali v předchozím příkladě.

---

*Řešení.*

Platí

$$A\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a výpočetem délek vektorů dostáváme

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

a

$$||A\vec{u}|| = \sqrt{(-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{26}.$$

Podíl délek je

$$\frac{||A\vec{u}||}{||\vec{u}||} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{5}} \approx 2.28$$

což je podle očekávání hodnota mezi menší a větší vlastní hodnotou, které vyšly v předchozím příkladě.

## 10.6 Transformace tenzoru pootočením

Uvažujme tyč ve směru osy $x$ namáhanou v ose tahem, při kterém vzniká jednotkové tahové napětí. Tyč je slepena spojem, který svírá s kolmicí na osu úhel $\theta$. (Nakreslete si obrázek.) Normálovým napětím rozumíme napětí ve směru kolmém na spoj.

1. Ukažte, že pro nenulový úhel $\theta$ je normálové napětí ve spoji menší, než by odpovídalo normálovém napětí pro spoj kolmý na osu tyče.
2. Ukažte, že normálové napětí je klesající funkcí úhlu $\theta$ na intervalu od nuly do $\frac{\pi}{2}$.
3. Určete normálové a smykové napětí pro extrémní případ $\theta = \frac{\pi}{2}$ a popište, jak by takový spoj vypadal.
4. Určete smykové napětí ve spoji a určte, pro jakou hodnotu úhlu je smykové napětí největší.
5. Určete, jestli je v tomto případě z hlediska působícího napětí výhodnější udělat šikmý spoj po směru nebo proti směru hodinových ručiček.

---

*Řešení.*

V souřadné soustavě podle zadání je tah ve směru osy $x$ roven jedné a další komponenty jsou nulové. Tedy $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Budeme otáčet proti směru hodinových ručiček, tj. o kladný úhel $\theta$.

Dostáváme (při zkráceném označení $S = \sin\theta$ a $C = \cos\theta$)

$$
\begin{aligned}
R^{-1}\sigma R &= \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & -S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & -CS \\ -CS & S^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

a normálová a smyková složka napětí jsou po řadě $\cos^2\theta$ a $-\sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{2}\sin(2\theta)$.

Odsud již dostaneme odpovědi na všechny uvedené otázky.

1. Normálové napětí udává funkce
$$\cos^2\theta.$$
Ta je rovna jedné pro $\theta = 0$, tj. pro nulový sklon spoje. Pro nenulový sklon je menší než jedna (uvažujeme sklon maximálně do 90 stupňů).
2. Derivace normálového napětí pro $\theta$ z intervalu od 0 do $\frac{\pi}{2}$ je
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\cos^2\theta = 2\cos\theta(-\sin\theta) = -\sin(2\theta) < 0.$$
Záporná derivace značí klesající funkci.
3. Pro $\theta = \frac{\pi}{2}$ by normálové napětí bylo nulové a smykové také nulové. Jednalo by se vlastně o podélně spojené kusy materiálu a při uvedeném namáhání by bylo jedno, jestli jsou slepené nebo ne.
4. Smykové namáhání je prvek v matici mimo hlavní diagonálu. V našem případě $-\frac{1}{2}\sin(2\theta)$. Smykové namáhání je maximální, pokud má tato funkce maximum nebo minimum. Takový extrém je pro $2\theta = \frac{\pi}{2}$ tj. pro $\theta = \frac{\pi}{4}$. Maximální smykové namáhání je pro spoj skloněný pod úhlem 45 stupňů.
5. Nezáleží. Změnou znaménka u úhlu $\theta$ se napětí ve směru kolmo na spoj ani podél spoje nemění, funkce $\cos^2\theta$ i $\sin^2\theta$ jsou obě sudé. U smykového napětí se mění znaménko, ale to jenom znamená namáhání v opačném smyslu (Pokud si na stěnu materiálu nakreslíme čtvereček s jednou stranou podél spoje a s druhou stranou kolmo na spoj, podle směru sklonu spoje máme dva zrcadlové případy, jak se tento čtvereček deformuje. Tomu odpovídá opačné znaménko smykové derivace.)

## 10.7 Vlastní čísla a vektory matice $3 \times 3$.

V cvičení z minulého týdne jsme ukázali, že nejobecnější symetrická matice zachovávající směr vektoru $(1, 0, 0)^T$ má v prvním řádku a prvním sloupci jenom jeden nenulový prvek, prvek v hlavní diagonále.

Uvažujme matici
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$
která je tohoto typu. Určete vlastní čísla a zbylé vlastní vektory matice.

---

*Řešení.*

Podle zadání víme, že jeden z vlastních vektorů je $e_1 = (1, 0, 0)^T$ a protože se zobrazí na pětinásobek, je příslušná vlastní hodnota $\lambda_1 = 5$. Charakteristický polynom je

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} &= (5-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) - (5-\lambda)\times 2\times 2 \\
&= (5-\lambda)\Big[(2-\lambda)(5-\lambda) - 4\Big] \\
&= (5-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6) = (5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-6)
\end{aligned}
$$

Další dvě vlastní hodnoty jsou $\lambda_2 = 1$ a $\lambda_3 = 6$

Uvažujme matici

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soustava

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

má řešení $x_1 = 0$ (plyne z první rovnice) a například $x_2 = 2$ a $x_3 = -1$ (plyne z druhé a třetí rovnice, které jsou jedna násobkem druhé). Vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě $\lambda_2 = 1$ je $e_2 = (0, 2, -1)^T$.

Uvažujme matici

$$A - 6I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soustava

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

má řešení $x_1 = 0$ (plyne z první rovnice) a například $x_2 = 1$ a $x_3 = 2$ (plyne z druhé a třetí rovnice, které jsou jedna násobkem druhé). Vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě $\lambda_3 = 6$ je $e_3 = (0, 1, 2)^T$.

# Kapitola 11

# Parciální derivace a rovnice vedení tepla

## 11.1 Difuzní rovnice ve 2D

Rozepište difuzní rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \nabla \cdot (D\nabla u)$$

ve dvourozměrném případě do kartézských souřadnic za předpokladu, že souřadné osy jsou ve vlastních směrech difuzní matice.

Okomentujte, jak předpoklady o vlastnostech materiálu a o modelovaném procesu (stacionárnost, existence či neexistence zdrojů, homogenita materiálu, stejné chování v různých směrech apod.) ovlivní výslednou rovnici.

---

*Řešení.*

Difuzní rovnice ve 2D v kartézských souřadnicích má tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Toto je nejobecnější tvar a bohužel také nejsložitější. Kdykoliv to jde, zjednodušujeme co se dá. To se dá ovšem udělat pouze v případě některých speciálních vlastností studovaného systému.

- Obecný tvar má schopnosti zachytit i nestacionární děj, děj probíhající v různé časové okamžiky jinou intenzitou. Pokud nás zajímá jenom stacionární stav kdy je hodnota stavové veličiny konstantní, můžeme rovnici zjednodušit předpokladem

  $$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

  do tvaru

  $$0 = \sigma + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

- Obecný tvar má díky přitomnosti zdrojů schopnosti zachytit i proces vzniku či zániku stavové veličiny. Pokud k tomuto nedochází, je rovnice bezzdrojová a můžeme ji zjednodušit předpokladem

  $$\sigma = 0$$

  do tvaru

  $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

- Obecný tvar má díky přitomnosti dvou různých difuzních koeficientů $D_x$ a $D_y$ schopnosti zachytit chování materiálu, který má odlišné vlastnosti v odlišných směrech, anizotropii či ortotropii. Vždy však toto není potřeba. Někdy je materiál izotropní, tj. má ve všech směrech stejné vlastnosti. V tomto případě stačí uvažovat jediný difuzní koeficient
$$D = D_x = D_y,$$
což rovnici zjednodušuje do tvaru
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$
- Pro konstantní difuzní koeficient je možno difuzní členy zjednodušit pomocí pravidla pro derivaci konstantního násobku, tj.
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = D_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
a analogicky pro další proměnné. Výraz na levé straně se nazývá kvaziderivace, výraz napravo je násobkem druhé derivace. Tento matematický předpoklad prakticky odpovídá homogennímu materiálu ve kterém je lineární konstitutivní zákon. Rovnice poté má tvar
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + D_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Jednotlivé varianty je pochopitelně možné kombinovat. Například stacionární rovnice v homogenním izotropním prostředí má derivaci podle času nulovou, stejné difuzní koeficienty v obou směrech a díky homogenitě a linearitě je možné kvaziderivace napsat jako druhé derivace, tj. rovnice má tvar
$$0 = \sigma + D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

## 11.2 Stacionární vedení tepla, lineární materiál

Najděte rozložení teploty v homogenní stěně při stacionárním vedení tepla a v materiálu s lineární materiálovou odezvou (koeficient tepelné vodivosti je konstantní). Jinými slovy, najděte všechny funkce splňující
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$$
pro $T = T(x)$ a $k \in \mathbb{R}^+$.

*Poznámka: Výsledek se dá použít i pro stěnu složenou z různých vrstev. Postupuje se tak, že se jednotlivé vrstvy nahradí ekvivalentními vrstvami z jednoho materiálu. Například vrstva z materiálu s polovičním koeficientem tepelné vodivosti se nahradí vrstvou, která je dvojnásobně silná.*

*Poznámka: Na stejnou úlohu se stejnou rovnicí a stejným řešením vede například proudění podzemní vody ve zvodni s napjatou hladinou (představou může být podzemní voda protékající půdou a shora i zdola ohraničená nepropustnou vrstvou).*

---

*Řešení.*

Rovnici můžeme vydělit konstantou $k$

Po zintegrování dostáváme
$$\frac{\partial T}{\partial x} = C_1$$
a po dalším zintegrování
$$T = C_1 x + C_2.$$
Teplota se mění lineárně. Dvě konstanty se určí pomocí dvou teplot na hranicích stěny.

## 11.3 Stacionární vedení tepla, nelineární materiál

Najděte rozložení teploty v homogenní stěně při stacionárním vedení tepla a v materiálu s nelineární materiálovou odezvou (koeficient tepelné vodivosti není konstantní). Použijte lineární závislost koeficientu tepelné vodivosti na teplotě. Jinými slovy, najděte všechny funkce splňující

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$$

pro $T = T(x)$ a $k = a + bT$, $a, b \in \mathbb{R}$.

*Poznámka: Výpočet necháme kvalitativní abychom viděli, že teplotní profil ve stěně není lineární. Pro užitečnost v inženýrských aplikacích je vhodné přidat okrajové podmínky a vyjádřit řešení pomocí parametrů v těchto okrajových podmínkách. To jsou typicky teploty na jednotlivých stranách stěny.*

*Poznámka: Na stejnou úlohu se stejnou rovnicí a stejným řešením, pouze pro $a = 0$, vede například proudění podzemní vody ve zvodni s volnou hladinou. Na rozdíl od předchozího příkladu chybí horní nepropustná vrstva).*

---

*Řešení.*

Po zintegrování dostáváme

$$(a + bT)\frac{\partial T}{\partial x} = C_1$$

a rovnici řešíme jako diferenciální rovnici se separovanými proměnnými. Odseparováním získáme

$$(a + bT)\mathrm{d}T = C_1\mathrm{d}x$$

a po zintegrování

$$aT + \frac{1}{2}bT^2 = C_1x + C_2.$$

Řešením je parabola otočená naležato. Dvě konstanty se určí pomocí teplot na hranicích stěny. Pro správný profil je nutné si vybrat správnou část paraboly tak, aby teplota zůstala mezi teplotami na krajích stěny.

## 11.4 Stacionární vedení tepla v žebru chladiče

Výjimečně jsme nuceni do rovnice vedení tepla zahrnout i zdroje. Modelujte vedení tepla v žebru chladiče. Úlohu uvažujte jako jednorozměrnou, materiál homogenní izotropní s konstantní tepelnou vodivostí. Kolem chladiče proudí vzduch o teplotě $T_0$ a chladič ztrácí teplo rychlostí úměrnou rozdílu teploty žebra v daném místě a teploty okolního vzduchu. (Koeficient úměrnosti je dán koeficientem přestupu tepla a šířkou žebra). Uvažujte stacionární děj.

---

*Řešení.*

Pokud použijeme předpoklad stacionárnosti a to, že zdroje jsou záporné a jejich výkon je úměrný rozdílu teplot, má rovnice následující tvar.

$$0 = -h(T - T_0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)$$

Homogenita a nezávislost $\lambda$ na teplotě umožňují použít druhou derivaci namísto kvaziderivace.

$$0 = -h(T - T_0) + \lambda\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}$$

Ke stejnému závěru je možné dojít i přesnou analýzou ve 3D, viz Cengel, Heat transfer, kapitola 3–6 Heat transfer from finned surfaces.

## 11.5 Výpočet parciálních derivací

1. $\frac{\partial}{\partial x}(x^2y + 2xy^3 + x + 1)$
2. $\frac{\partial}{\partial y}(x^2y + 2xy^3 + x + 1)$
3. $\frac{\partial}{\partial x}(5x^4y^3 - 3xy^5 + x^2)$
4. $\frac{\partial}{\partial y}(5x^4y^3 - 3xy^5 + x^2)$

---

*Řešení.*

1. $\frac{\partial}{\partial x}(x^2y + 2xy^3 + x + 1) = 2x \cdot y + 2y^3 + 1 + 0 = 2xy + 2y^3 + 1$
2. $\frac{\partial}{\partial y}(x^2y + 2xy^3 + x + 1) = x^2 + 2x \cdot 3y^2 + 0 + 0 = x^2 + 6xy^2$
3. $\frac{\partial}{\partial x}(5x^4y^3 - 3xy^5 + x^2) = 20x^3y^3 - 3y^5 + 2x$
4. $\frac{\partial}{\partial y}(5x^4y^3 - 3xy^5 + x^2) = 15x^4y^2 - 15xy^4 + 0 = 15x^4y^2 - 15xy^4$

## 11.6 Rovnice vedení tepla v dvourozměrném materiálu

Teplota ve dvourozměrné desce pro $0 \leq x \leq 10$ a $0 \leq y \leq 10$ zachycené v určitém okamžiku termokamerou je popsána rovnicí

$$T(x, y) = 2y^2 + x^3.$$

Rozměry jsou v centimetrech, teplota ve stupních Celsia. (Formálně to nevychází, ale ke každému členu můžeme dodat konstantu, která rozměr opraví tak, aby výsledek opravdu vycházel ve stupních Celsia. Pro jednoduchost tuto komplikaci vynecháme.)

1. Vypočtěte gradient $\nabla T$ a tok tepla $-\lambda \cdot \nabla T$. Součinitel tepelné vodivosti (pro jednoduchost s celými čísly a bez jednotky) je $\lambda = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Určete, zda na levém okraji desky ($x = 0$) teče teplo dovnitř desky nebo z desky ven.
3. Vypočtěte divergenci toku tepla, tj. $\nabla \cdot (-\lambda \cdot \nabla T)$.
4. V desce nejsou zdroje tepla. Ochlazuje se deska uprostřed, nebo otepluje?

---

*Řešení.*

1. Parciální derivace jsou
$$\frac{\partial T}{\partial x} = 3x^2,$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} = 4y.$$
Odsud dostáváme gradient
$$\nabla T = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 4y \end{pmatrix}$$
a tok tepla
$$\vec{q} = -\lambda \nabla T = -(3x^2)\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - 4y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15x^2 - 4y \\ -3x^2 - 8y \end{pmatrix}.$$
2. Pro $x = 0$ a $y > 0$ je první komponenta toku záporná a teplo teče doleva, tj. ven z desky.

3. Divergence je
$$\nabla \cdot \vec{q} = \frac{\partial}{\partial x}(-15x^2 - 4y) + \frac{\partial}{\partial y}(-3x^2 - 8y) = -30x - 8.$$
4. Pro $x > 0$ je tato divergence záporná a tok tepla slábne. To znamená, že se deska ohřívá. V každém místě a tedy i uprostřed.

## 11.7 Poznámky k online výuce

Nejzásadnější jsou první a poslední příklad.

- V prvním příkladě se trénuje rozepsání rovnice do souřadnic a posouzení, jestli je stacionární, se zdroji atd. To není vlastně žádná matematika ani počítání a dá se to odhalit na první pohled. Toto je také většinou jediné, co člověk s rovnicí dělá. Kromě toho ji už jenom "nacpe" do výpočetního prostředí.
- Druhý a třetí příklad jsou jenom reformulace příkladů, kterým jsme se věnovali ve cvičení s integrálem. Nyní to stejné jenom s jiným názvoslovím a aparátem difuzní rovnice. Abychom viděli, že to stejné "vypadne" i z obecného modelu.
- Čtvrtý příklad je ukázka, že i když je náš svět trojrozměrný, někdy je možné dimenzi úloh redukovat. Třeba i tak, že se nějaká věc započítá méně přirozeným způsobem. Modelový příklad je žebro chladiče. Doj nebo trojrozměrné (podle toho bereme-li ho jako placku nebo jako těleso). Teplo se předává plochou žebra do okolí. Kdybychom chtěli studovat žebro jednodimenzionálně ve směru od součástky ven, můžeme předávání tepla do okolí modelovat tak, že podél žebra jsou spotřebiče, které teplo z žebra odstraňují. Výkon těchto spotřebičů souvisí s teplotou. Vede to na jednoduchou jednodimenzionální rovnici, se kterou se v numerických výpočtech manipuluje lépe, než s rovnicí dvoudimenzionální.
- Pátý příklad je výpočet jednoduchých derivací, ale tentokrát funkce dvou proměnných. Není to nic nového: proměnnou, přes kterou se nederivuje, považujte za parametr (konstantu). A rovnice s parametrem derivovat umíme.
- Poslední příklad je co do matematického aparátu triviální (derivace polynomu a násobení 2x2 matice se sloupcovým vektorem), ale spojuje spoustu dovedností do řetězce, který už má reálné využití. Ve výpočtech je hlavně nutné neztratit hlavní linii. Nesoustředit se na detaily, ale na to, co se vlastně počítá a jak na to.
  - Výpočtem derivací teploty podle prostorových souřadnic vypočítáme, jak se mění teplota podél osy x a podél osy y. Z toho poté určíme vektor (gradient), ukazující, kterým směrem teplota roste a jak intenzivní tento růst je.
  - Vynásobením gradientu záporným znamínkem a maticí se součinitelem tepelné vodivost určíme, jakým směrem teče teplo a jak intenzivně. Tuto informaci budeme mít pro všechny body uvažované množiny a dosazením se můžeme podívat, jestli v jednom konkrétním bodě je tok do studované množiny nebo ven.
  - Když máme tok, můžeme vypočítat divergenci a v každém bodě budeme mít informaci, zda tok v daném bodě slábne čí zesiluje a jak intenzivně.
  - Pokud máme dodatečnou informaci, můžeme říci, na úkor čeho je zeslabování nebo zesilování toku realizováno. Pokud například nejsou zdroj a tok slábne, znamená to, že z toku se teplo "odpojuje a zůstává v materiálu" a to znamená, že v daném místě roste teplota.

# Kapitola 12

# Dvojný integrál

## 12.1 Kvadratický moment pro obdélník

Vypočtěte integrál

$$\iint_\Omega y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

přes obdélník se stranami podél os, se středem v počátku a délkou stran $a$ a $b$, tj. přes množinu $\Omega$ danou nerovnostmi

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} \leq & x \leq \frac{a}{2}, \\ -\frac{b}{2} \leq & y \leq \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

---

*Řešení.*

$$\iint_\Omega y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x \times \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \,\mathrm{d}y = a \times \left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = a \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{b^3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{b^3}{8}\right) = \frac{1}{12}ab^3$$

## 12.2 Těžiště trojúhelníku

Vypočtěte integrál

$$\iint_\Omega x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

přes trojúhelník $\Omega$ s vrcholy v bodech $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,1)$ a poté vydělením obsahem trojúhleníka najděte $x$-ovou polohu těžiště.

---

*Řešení.*

Rovnice přímky, ve které leží přepona trojúhelníka, je

$$y = 1 - x$$

a trojúhelník tedy je možno zapsat soustavou nerovností

$$
\begin{aligned}
0 \leq &x \leq 1,\\
0 \leq &y \leq 1 - x.
\end{aligned}
$$

Použitím těchto nerovností můžeme dvojný integrál transformovat na dvojnásobný a vypočítat.

$$
\begin{aligned}
\iint_\Omega x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 [xy]_0^{1-x} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 x - x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

$$
x_T = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}
$$

## 12.3 Velikost tlakové síly na hráz přehrady

Viz video ke cvičení a text k přednášce.

## 12.4 Působiště tlakové síly na hráz přehrady

Viz video ke cvičení a text k přednášce.