Lesnická
a dřevařská
fakulta

Mgr. Miroslava Tkadlecová, Ph.D.

Konstruktivní geometrie & technické kreslení

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

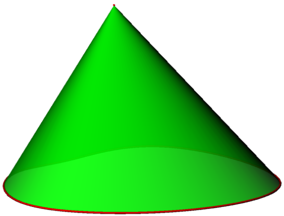
Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

PLOCHY TECHNICKÉ PRAXE

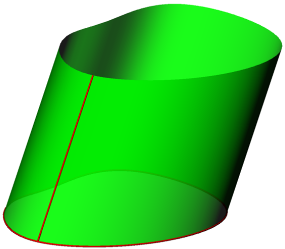
ROZVINUTELNÉ PLOCHY

3 základní typy:

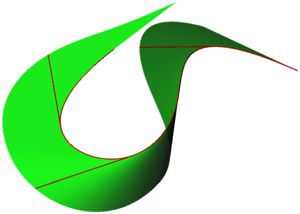
obecný kužel



obecný válec



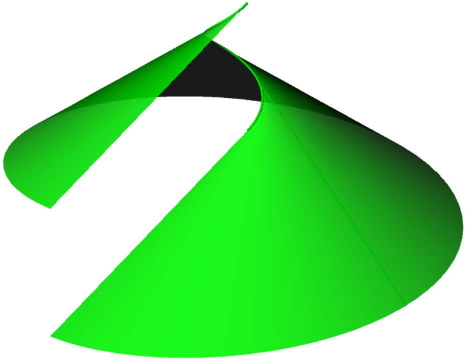
plocha tečen prostorové křivky



Poznámka: Rozvinutelná plocha může být také složena z předchozích typů

Jiný způsob zadání:

Plocha tečen prostorové křivky bývá často z konstrukčních důvodů zadána jiným způsobem.

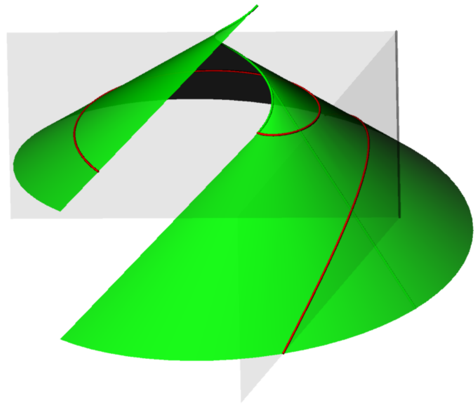


Jiný způsob zadání:

Plocha tečen prostorové křivky bývá často z konstrukčních důvodů zadána jiným způsobem.

Uvažujme na ploše tečen prostorové křivky dvě rovinné křivky.

Pak platí následující:

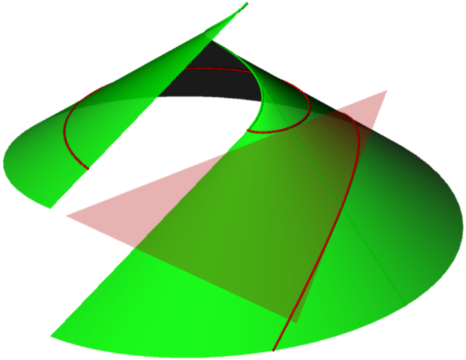


Jiný způsob zadání:

Plocha tečen prostorové křivky bývá často z konstrukčních důvodů zadána jiným způsobem.

Uvažujme na ploše tečen prostorové křivky dvě rovinné křivky.

Pak platí následující:



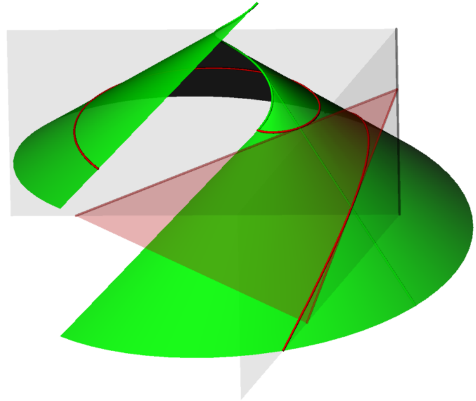
- tečná rovina rozvinutelné plochy je společnou tečnou rovinou obou rovinných křivek

Jiný způsob zadání:

Plocha tečen prostorové křivky bývá často z konstrukčních důvodů zadána jiným způsobem.

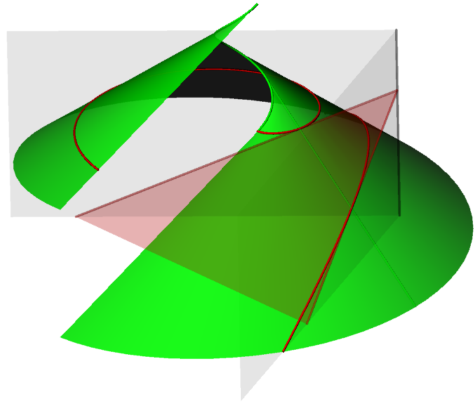
Uvažujme na ploše tečen prostorové křivky dvě rovinné křivky.

Pak platí následující:



- tečná rovina rozvinutelné plochy je společnou tečnou rovinou obou rovinných křivek
- tečny rovinných křivek jsou průsečnice rovin ve kterých křivky leží s touto tečnou rovinou

Jiný způsob zadání:



Plocha tečen prostorové křivky bývá často z konstrukčních důvodů zadána jiným způsobem.

Uvažujme na ploše tečen prostorové křivky dvě rovinné křivky.

Pak platí následující:

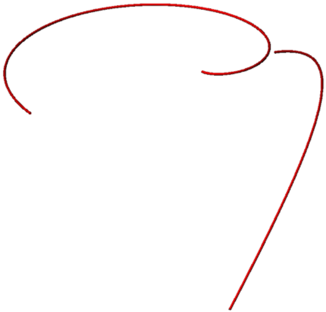
- tečná rovina rozvinutelné plochy je společnou tečnou rovinou obou rovinných křivek
- tečny rovinných křivek jsou průsečnice rovin ve kterých křivky leží s touto tečnou rovinou

Rozvinutelné ploše, která je daná dvěma křivkami ležícími ve dvou různých rovinách, říkáme přechodová plocha

Konstrukce přechodové plochy:

Jsou dány dvě rovinné křivky, úkolem je sestrojit přechodovou plochu.

Postup řešení:

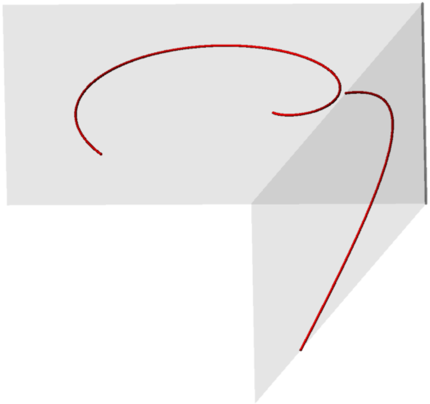


Konstrukce přechodové plochy:

Jsou dány dvě rovinné křivky, úkolem je sestrojit přechodovou plochu.

Postup řešení:

- určíme průsečnici rovin, ve kterých křivky leží

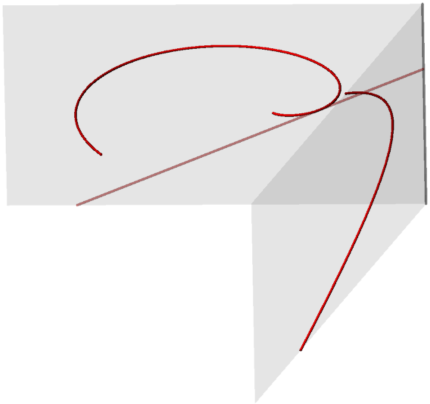


Konstrukce přechodové plochy:

Jsou dány dvě rovinné křivky, úkolem je sestrojit přechodovou plochu.

Postup řešení:

- určíme průsečnici rovin, ve kterých křivky leží
- libovolným bodem jedné křivky vedeme tečnu a určíme její průsečík s průsečnicí rovin

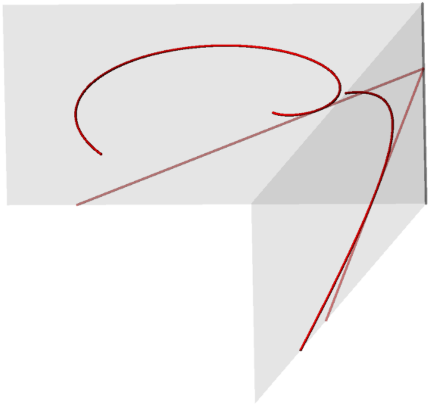


Konstrukce přechodové plochy:

Jsou dány dvě rovinné křivky, úkolem je sestrojit přechodovou plochu.

Postup řešení:

- určíme průsečnici rovin, ve kterých křivky leží
- libovolným bodem jedné křivky vedeme tečnu a určíme její průsečík s průsečnicí rovin
- tímto průsečíkem vedeme tečnu k druhé křivce

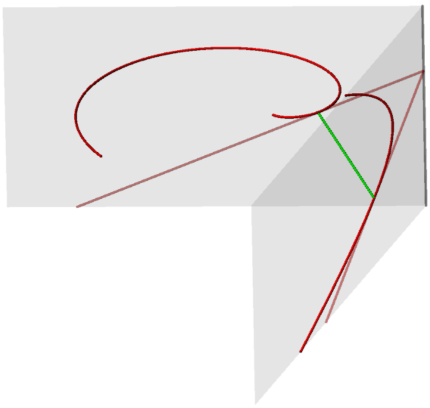


Konstrukce přechodové plochy:

Jsou dány dvě rovinné křivky, úkolem je sestrojit přechodovou plochu.

Postup řešení:

- určíme průsečnici rovin, ve kterých křivky leží
- libovolným bodem jedné křivky vedeme tečnu a určíme její průsečík s průsečnicí rovin
- tímto průsečíkem vedeme tečnu k druhé křivce
- spojnice bodů dotyku je přímkou přechodové plochy

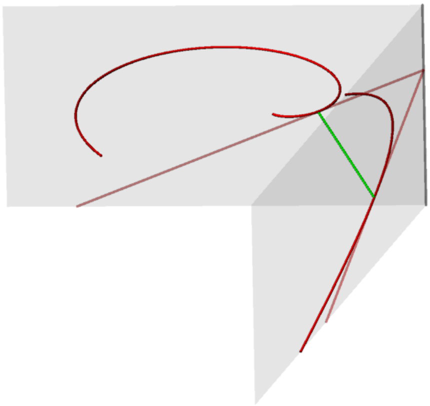


Konstrukce přechodové plochy:

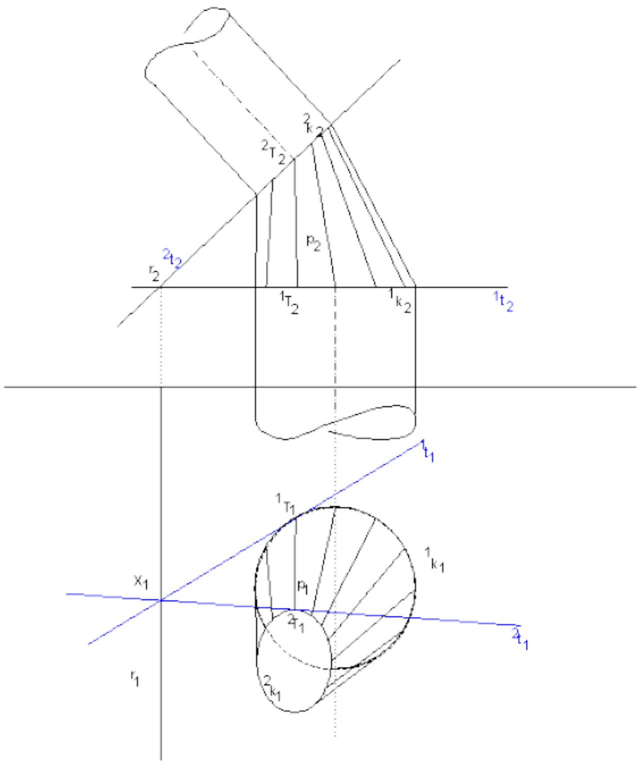
Jsou dány dvě rovinné křivky, úkolem je sestrojit přechodovou plochu.

Postup řešení:

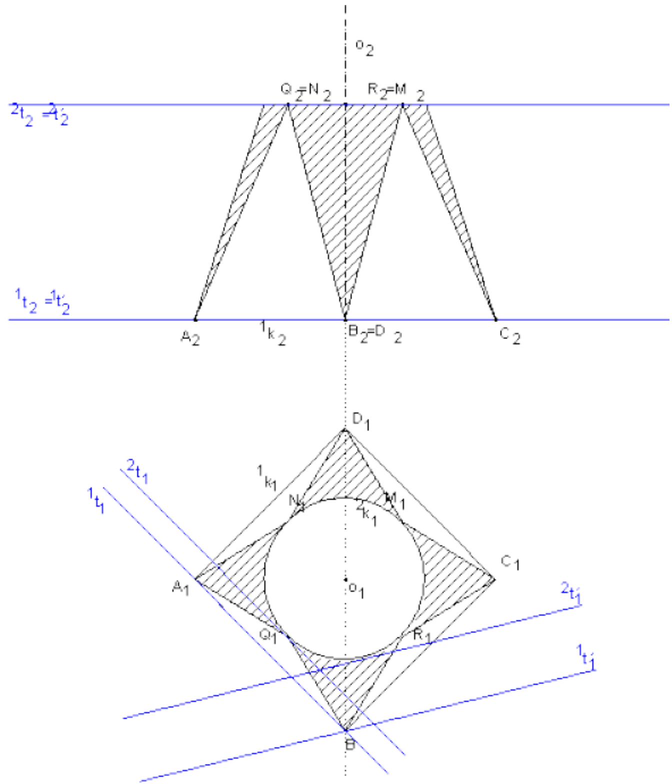
- určíme průsečnici rovin, ve kterých křivky leží
- libovolným bodem jedné křivky vedeme tečnu a určíme její průsečík s průsečnicí rovin
- tímto průsečíkem vedeme tečnu k druhé křivce
- spojnice bodů dotyku je přímkou přechodové plochy



Nejčastější aplikací těchto ploch je určení přechodové plochy mezi dvěma danými potrubími. Určujícími křivkami mohou být dvě kružnice, kružnice a elipsa, nebo například i kružnice a čtverec.

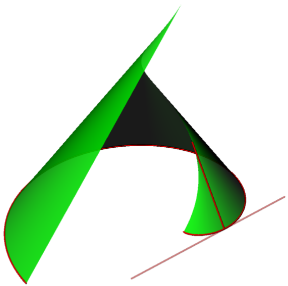


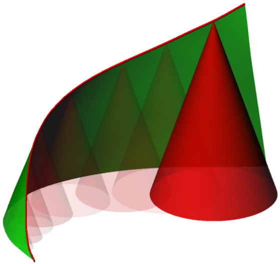
$^2k_2$
$^2T_2$
p_2
$^2t_2$
r_2
$^1T_2$
$^1k_2$
$^1t_2$
$^1t_1$
$^1T_1$
$^1k_1$
x_1
p_1
$^2T_1$
$^2t_1$
r_1
$^2k_1$

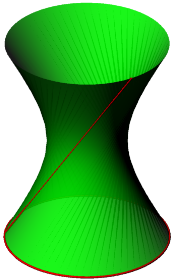


o2
Q2=N2
R2=M2
2t2 =2t'2
1t2 =1t'2
A2
1k2
B2=D2
C2
D1
2t1
1k1
1t1
N1
M1
2k1
C1
A1
o1
2t'1
Q1
R1
1t'1
B

PLOCHY KONSTANTNÍHO SPÁDU







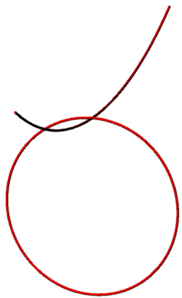
Rozvinutelné plochy konstantního spádu, dané řídicí křivkou K v půdorysně, jsou

- válcové plochy,
- plochy, u kterých jsou pravoúhlé průměty tvořicích přímek do průmětny normály řídicí křivky K (rotační kuželová plocha, plocha tečen šroubovice).

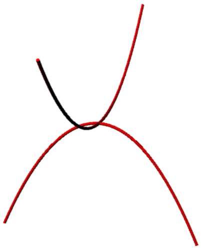
použití v praxi - výkopové a násypové roviny

TRANSLAČNÍ PLOCHY

plocha kruhovo - kruhová

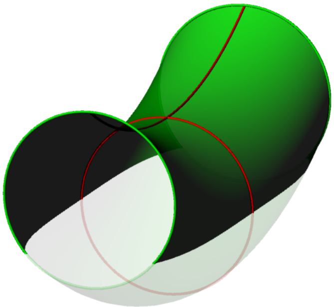


plocha parabolicko - parabolická

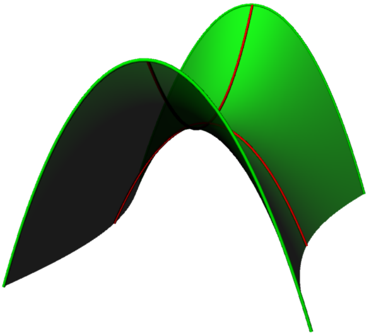


TRANSLAČNÍ PLOCHY

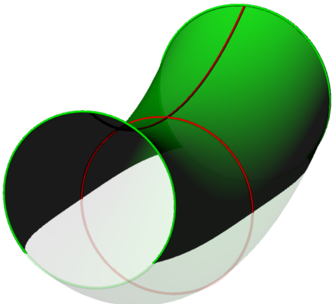
plocha kruhovo - kruhová



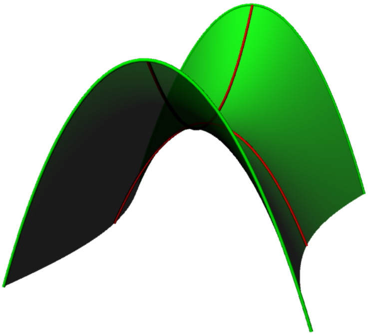
plocha parabolicko - parabolická



TRANSLAČNÍ PLOCHY



plocha kruhovo - kruhová

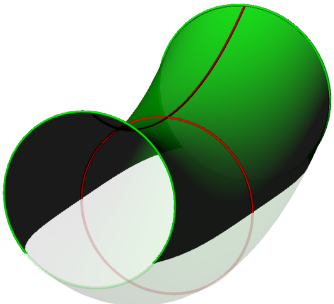


plocha parabolicko - parabolická

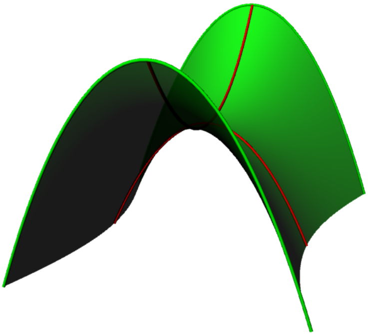
použití v praxi - konstrukce kleneb (mají výborné statické vlastnosti), průnik dvou translačních ploch kuželosečko-kuželosečkových se využívá jako křížová klenba

TRANSLAČNÍ PLOCHY

plocha kruhovo - kruhová



plocha parabolicko - parabolická

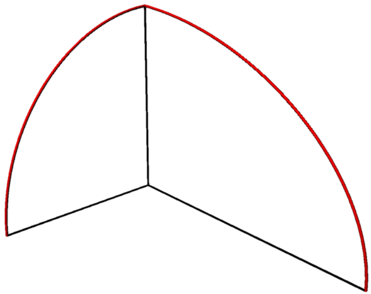


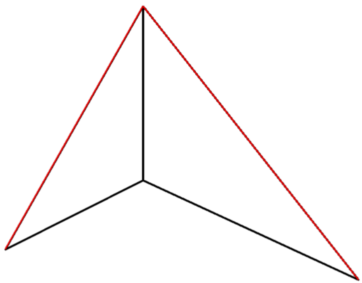
použití v praxi - konstrukce kleneb (mají výborné statické vlastnosti), průnik dvou translačních ploch kuželosečko-kuželosečkových se využívá jako křížová klenba

Translační plochy mají tu nevýhodu, že jsou vodorovnou rovinou proťaty v křivce, což může ve stavebnictví působit konstrukční potíže.

KLÍNOVÉ PLOCHY

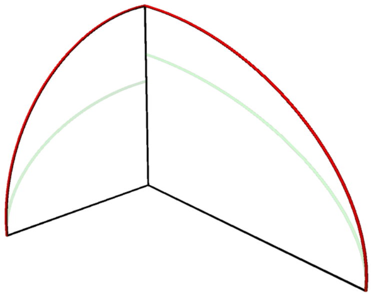
Předchozí problém translačních ploch vyřešily klínové plochy, u nichž se uplatnily vlastnosti translačních ploch a navíc jsou vodorovnou rovinou proťaty v přímce. Klínové plochy jsou zobecněním translačních ploch v tom smyslu, že tvořící křivka, která se v případě translačních ploch pouze spojitě posouvá, se v případě klínových ploch při posunu ještě spojitě afinně transformuje.

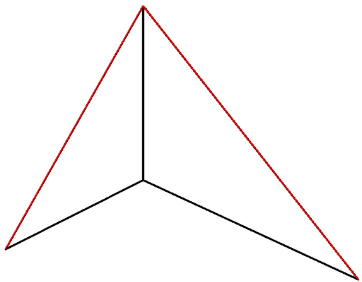




KLÍNOVÉ PLOCHY

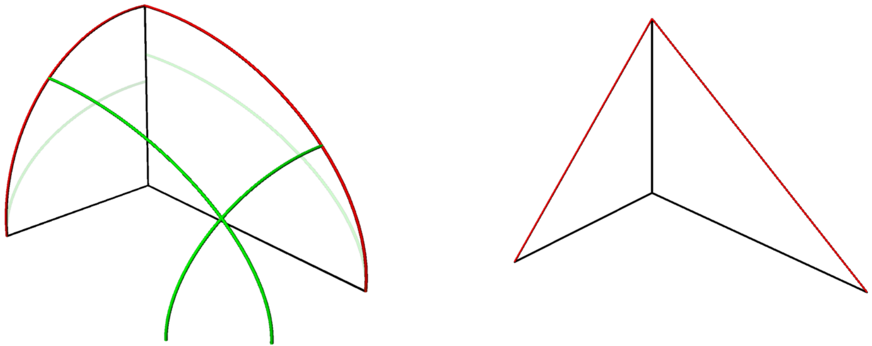
Předchozí problém translačních ploch vyřešily klínové plochy, u nichž se uplatnily vlastnosti translačních ploch a navíc jsou vodorovnou rovinou proťaty v přímce. Klínové plochy jsou zobecněním translačních ploch v tom smyslu, že tvořící křivka, která se v případě translačních ploch pouze spojitě posouvá, se v případě klínových ploch při posunu ještě spojitě afinně transformuje.





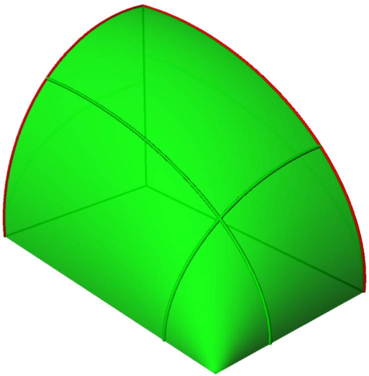
KLÍNOVÉ PLOCHY

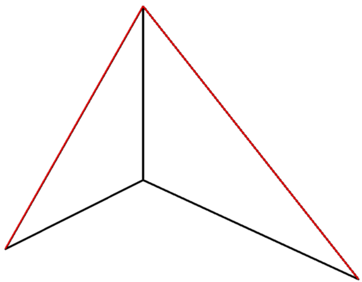
Předchozí problém translačních ploch vyřešily klínové plochy, u nichž se uplatnily vlastnosti translačních ploch a navíc jsou vodorovnou rovinou proťaty v přímce. Klínové plochy jsou zobecněním translačních ploch v tom smyslu, že tvořící křivka, která se v případě translačních ploch pouze spojitě posouvá, se v případě klínových ploch při posunu ještě spojitě afinně transformuje.



KLÍNOVÉ PLOCHY

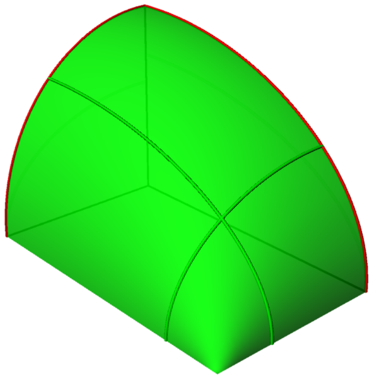
Předchozí problém translačních ploch vyřešily klínové plochy, u nichž se uplatnily vlastnosti translačních ploch a navíc jsou vodorovnou rovinou proťaty v přímce. Klínové plochy jsou zobecněním translačních ploch v tom smyslu, že tvořící křivka, která se v případě translačních ploch pouze spojitě posouvá, se v případě klínových ploch při posunu ještě spojitě afinně transformuje.

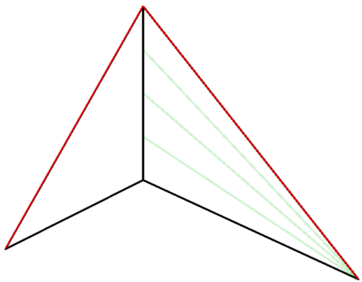




KLÍNOVÉ PLOCHY

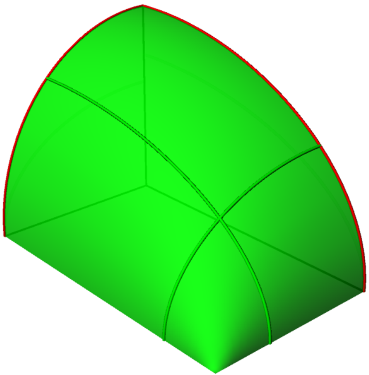
Předchozí problém translačních ploch vyřešily klínové plochy, u nichž se uplatnily vlastnosti translačních ploch a navíc jsou vodorovnou rovinou proťaty v přímce. Klínové plochy jsou zobecněním translačních ploch v tom smyslu, že tvořící křivka, která se v případě translačních ploch pouze spojitě posouvá, se v případě klínových ploch při posunu ještě spojitě afinně transformuje.

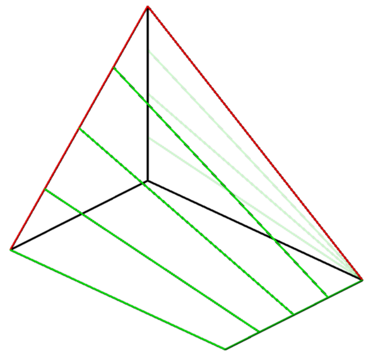




KLÍNOVÉ PLOCHY

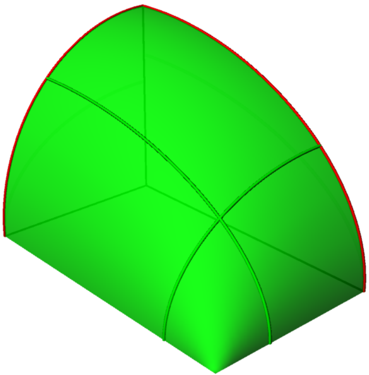
Předchozí problém translačních ploch vyřešily klínové plochy, u nichž se uplatnily vlastnosti translačních ploch a navíc jsou vodorovnou rovinou proťaty v přímce. Klínové plochy jsou zobecněním translačních ploch v tom smyslu, že tvořící křivka, která se v případě translačních ploch pouze spojitě posouvá, se v případě klínových ploch při posunu ještě spojitě afinně transformuje.

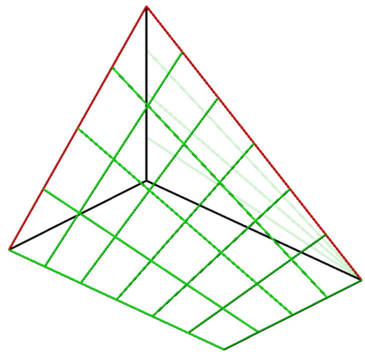




KLÍNOVÉ PLOCHY

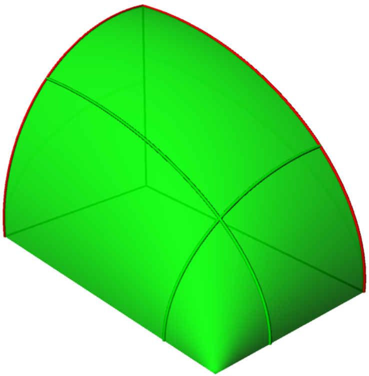
Předchozí problém translačních ploch vyřešily klínové plochy, u nichž se uplatnily vlastnosti translačních ploch a navíc jsou vodorovnou rovinou proťaty v přímce. Klínové plochy jsou zobecněním translačních ploch v tom smyslu, že tvořící křivka, která se v případě translačních ploch pouze spojitě posouvá, se v případě klínových ploch při posunu ještě spojitě afinně transformuje.

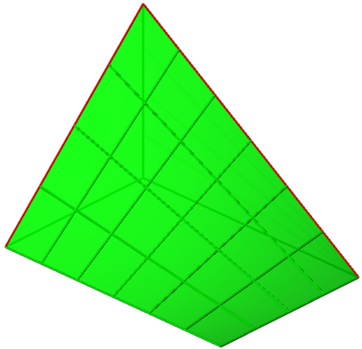




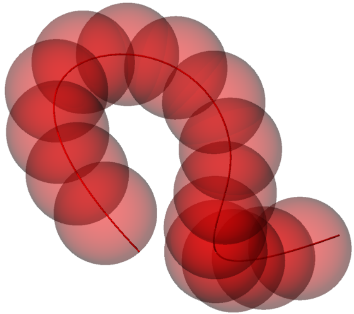
KLÍNOVÉ PLOCHY

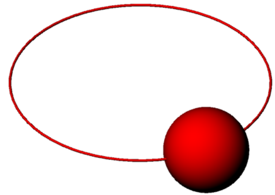
Předchozí problém translačních ploch vyřešily klínové plochy, u nichž se uplatnily vlastnosti translačních ploch a navíc jsou vodorovnou rovinou proťaty v přímce. Klínové plochy jsou zobecněním translačních ploch v tom smyslu, že tvořící křivka, která se v případě translačních ploch pouze spojitě posouvá, se v případě klínových ploch při posunu ještě spojitě afinně transformuje.



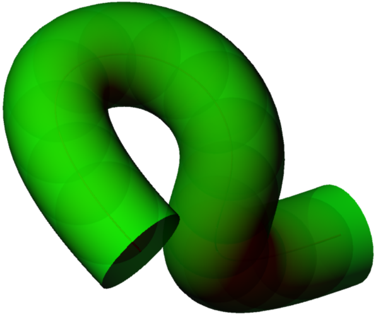


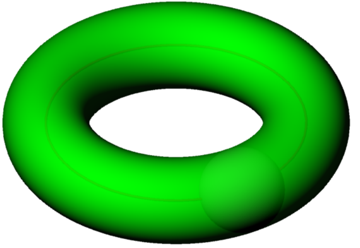
OBALOVÉ PLOCHY



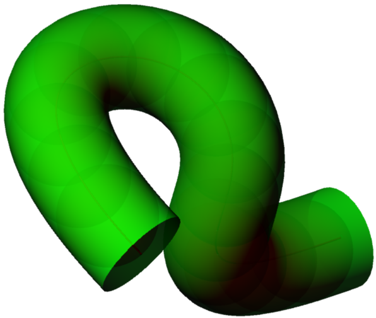
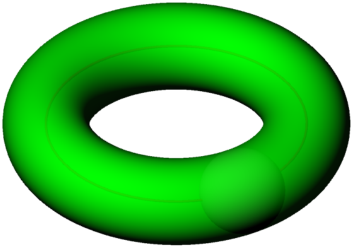


OBALOVÉ PLOCHY



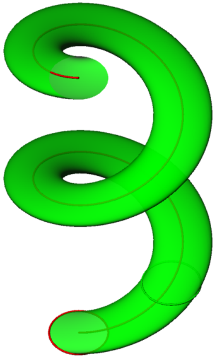


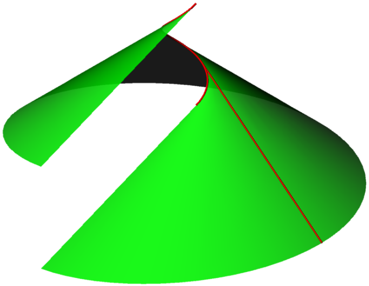
OBALOVÉ PLOCHY

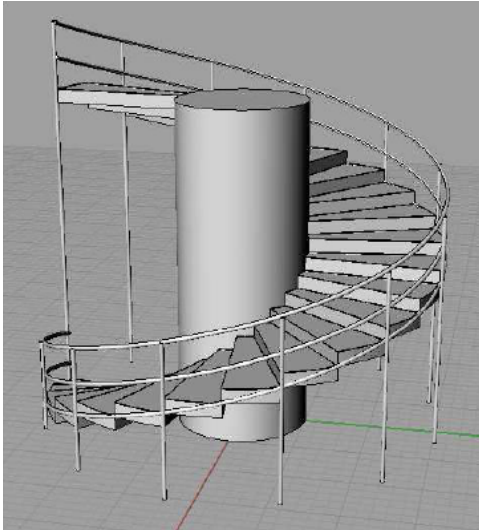
 

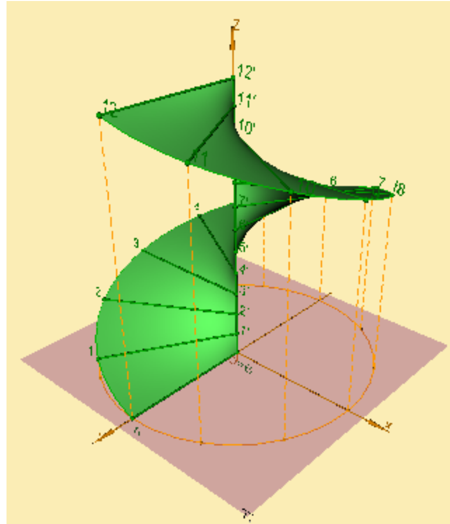
použití v praxi - rourové plochy - obálky kulových ploch, jejichž střed se pohybuje po křivce k, poloměr kulových ploch je buď konstantní nebo se spojitě mění

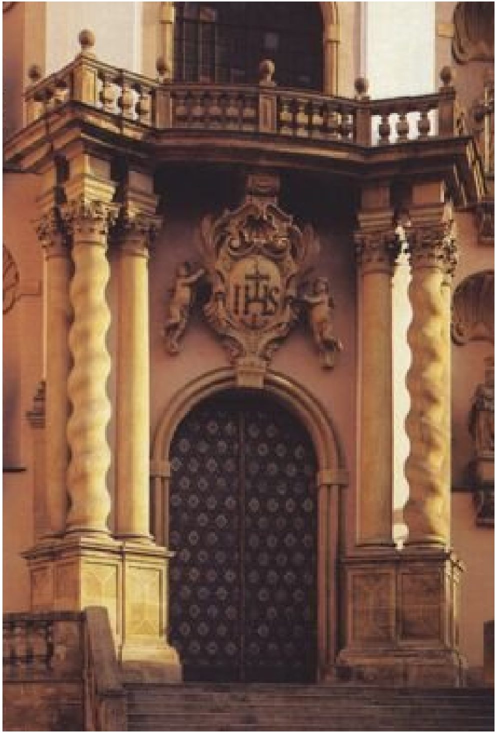
ŠROUBOVÉ PLOCHY

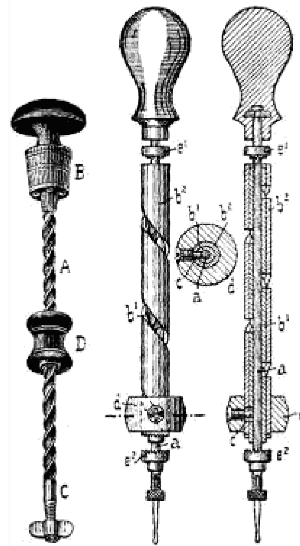







z
12'
11'
10'
4'
3'
2'
1'
4
3
2
1
x

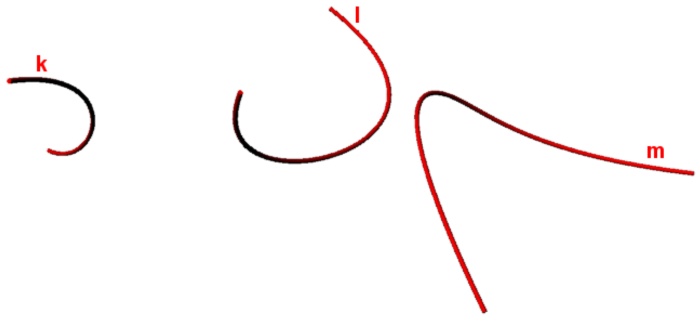

IHS


B
A
D
C

ZBORCENÉ PLOCHY

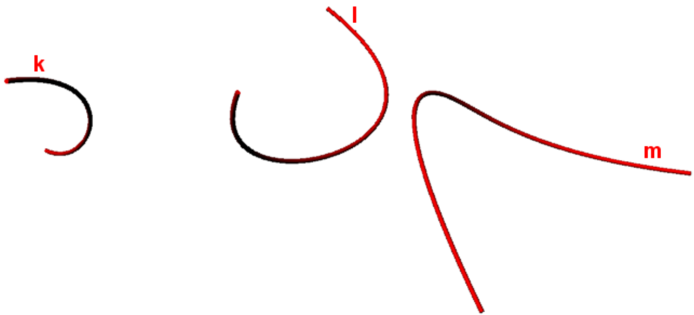
Zborcená plocha je dána třemi různými (obecně prostorovými) řídícími křivkami k, l, m, které neleží na téže rozvinutelné ploše.

Přímka protínající všechny tři řídícími křivkami se nazývá tvořící přímka



ZBORCENÉ PLOCHY

Zborcená plocha je dána třemi různými (obecně prostorovými) řídícími křivkami k, l, m, které neleží na téže rozvinutelné ploše.



Přímka protínající všechny tři řídícími křivkami se nazývá tvořící přímka

Konstrukce tvořící přímky:

ZBORCENÉ PLOCHY

Zborcená plocha je dána třemi různými (obecně prostorovými) řídícími křivkami k, l, m, které neleží na téže rozvinutelné ploše.

Přímka protínající všechny tři řídícími křivkami se nazývá tvořící přímka

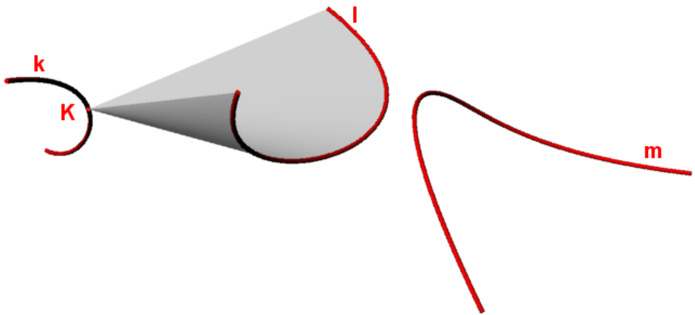
Konstrukce tvořící přímky:

- na řídící křivce k zvolíme bod K

ZBORCENÉ PLOCHY

Zborcená plocha je dána třemi různými (obecně prostorovými) řídícími křivkami k, l, m, které neleží na téže rozvinutelné ploše.

Přímka protínající všechny tři řídícími křivkami se nazývá tvořící přímka



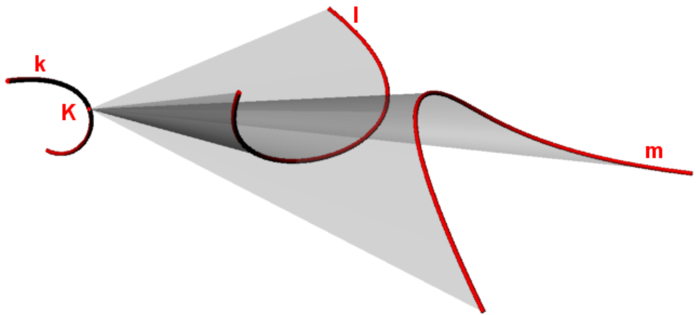
Konstrukce tvořící přímky:

- na řídící křivce k zvolíme bod K
- sestrojíme kuželovou plochu o vrcholu K a řídící křivce l a kuželovou plochu o vrcholu K a řídící křivce m

ZBORCENÉ PLOCHY

Zborcená plocha je dána třemi různými (obecně prostorovými) řídícími křivkami k, l, m, které neleží na téže rozvinutelné ploše.

Přímka protínající všechny tři řídícími křivkami se nazývá tvořící přímka



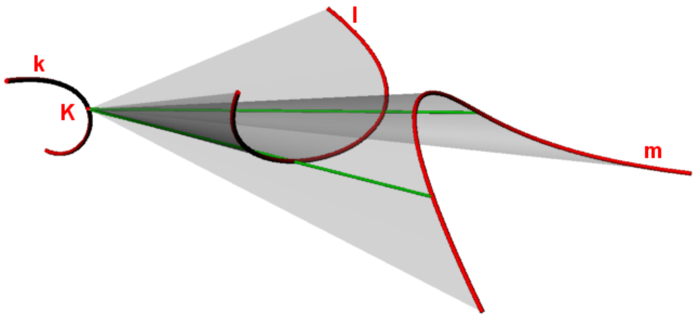
Konstrukce tvořící přímky:

- na řídící křivce k zvolíme bod K
- sestrojíme kuželovou plochu o vrcholu K a řídící křivce l a kuželovou plochu o vrcholu K a řídící křivce m

ZBORCENÉ PLOCHY

Zborcená plocha je dána třemi různými (obecně prostorovými) řídícími křivkami k, l, m, které neleží na téže rozvinutelné ploše.

Přímka protínající všechny tři řídícími křivkami se nazývá tvořící přímka



Konstrukce tvořící přímky:

- na řídící křivce k zvolíme bod K
- sestrojíme kuželovou plochu o vrcholu K a řídící křivce l a kuželovou plochu o vrcholu K a řídící křivce m
- tvořící přímky zborcené plochy jsou průnikem těchto dvou kuželových ploch

Další pojmy:

- Je-li tvořící přímka dotyková povrchová přímka obou kuželových ploch, pak se nazývá torzální přímka a vrchol kuželů se nazývá kuspidální bod. Podél torzální přímky existuje jediná tečná rovina zborcenéné plochy (torzální rovina).

Další pojmy:

- Je-li tvořící přímka dotyková povrchová přímka obou kuželových ploch, pak se nazývá torzální přímka a vrchol kuželů se nazývá kuspidální bod. Podél torzální přímky existuje jediná tečná rovina zborcenéné plochy (torzální rovina).
- Křivka na zborcené ploše se nazývá dvojná trojná, . . . , jestliže každým bodem této křivky (s konečným počtem vyjímek) prochází dvě tři, . . . tvořící přímky (které nemusí být torzální).

Další pojmy:

- Je-li tvořící přímka dotyková povrchová přímka obou kuželových ploch, pak se nazývá torzální přímka a vrchol kuželů se nazývá kuspidální bod. Podél torzální přímky existuje jediná tečná rovina zborcenéné plochy (torzální rovina).
- Křivka na zborcené ploše se nazývá dvojná trojná, . . . , jestliže každým bodem této křivky (s konečným počtem vyjímek) prochází dvě tři, . . . tvořící přímky (které nemusí být torzální).
- Kuspidální body se vyskytují na dvojných trojných, . . . křivkách zborcené plochy. Torzální přímka prochází kuspidálním bodem.

Další pojmy:

- Je-li tvořící přímka dotyková povrchová přímka obou kuželových ploch, pak se nazývá torzální přímka a vrchol kuželů se nazývá kuspidální bod. Podél torzální přímky existuje jediná tečná rovina zborcenéné plochy (torzální rovina).
- Křivka na zborcené ploše se nazývá dvojná trojná, ..., jestliže každým bodem této křivky (s konečným počtem vyjímek) prochází dvě tři, ... tvořící přímky (které nemusí být torzální).
- Kuspidální body se vyskytují na dvojných trojných, ... křivkách zborcené plochy. Torzální přímka prochází kuspidálním bodem.
- Tečná rovina v nevlastním bodě netorzální přímky n zborcené plochy se nazývá asymptotická.

Stupeň plochy:

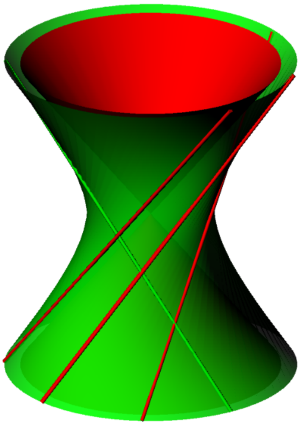
- Buď zborcená plocha $\Phi_{k,l,m}$ dána algebraickými křivkami k, l, m stupňů n_k, n_l, n_m.
- Nemají-li řídící křivky žádný společný bod, pak $\Phi_{k,l,m}$ je stupně
$$2n_kn_ln_m.$$
- Mají-li řídící křivky k, l společných s_{kl} bodů, křivky k, m společných s_{km} bodů, křivky m, l společných s_{ml} bodů, pak $\Phi_{k,l,m}$ je stupně
$$2n_1n_2n_3 - s_{kl}n_m - s_{km}n_l - s_{ml}n_k.$$

Zborcené plochy 2. stupně (zborcené kvadriky):

- Buď dány tři řídící přímky – mimoběžky a_1, a_2, a_3. Tvořící přímky vytvoří zborcenou plochu Φ_{a_1,a_2,a_3} stupně 2·1·1·1=2, tj. kvadriku
- Tvořící přímky plochy Φ, například $b_1, b_2, b_3, b_4 \ldots$ jsou navzájem mimoběžné, neboť kdyby například b_1, a b_2 byly ruznoběžné, pak alespoň dvě z přímek $a_1, a_2, a_3 \subset \rho(b_1, b_2)$, ale to je spor s předpokladem mimoběžnosti přímek 1a, 2a, 3a.
- Tvořící přímky - mimoběžky b_i plochy Φ se nazývají např. přímky I. regulu plochy Φ. Zvolme nyní tři mimoběžky I. regulu, například b_1, b_2, b_3 jako řídící přímky plochy Φ, pak přímky a_1, a_2, a_3 spolu s dalšími mimoběžkami a_i tvoří přímky II. regulu plochy Φ.

zborcené kvadriky:

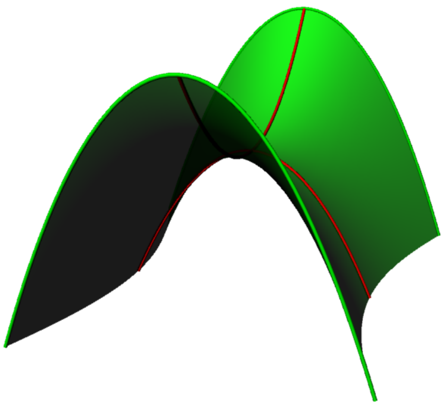
jednodílný hyperboloid :



- Bod tvořící přímky nejblíže ose vytváří při rotaci hrdlovou kružnici (kružnice plochy s nejmenším poloměrem).
- Střed hrdlové kružnice nazýváme středem hyperboloidu.
- Na ploše existují dva systémy mimoběžných přímek na ploše. . . 2 reguly.
- Jednodílný hyperboloid je nerozvinutelná plocha.
- Asymptotická kuželová plocha má vrchol ve středu hyperboloidu.
- Každá tvořící přímka asymptotické kuželové plochy je rovnoběžná s některou tvořící přímkou hyperboloidu.
- Má-li asymptotická kuželová plocha obrys, jsou její obrysové přímky asymptotami obrysu hyperboloidu. Obrysem hyperboloidu je hyperbola.

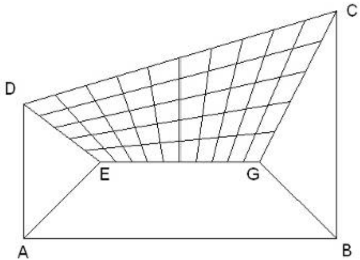
zborcené kvadriky:

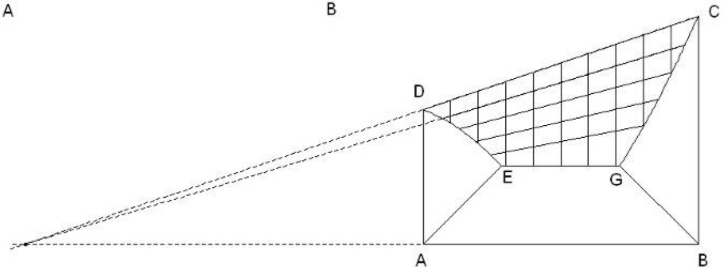
hyperbolický paraboloid



- Hyperbolický paraboloid je určen buď dvěma (vlastními) mimoběžnými přímkami a řídící rovinou s nimi různoběžnou nebo třemi (vlastními) mimoběžkami, které jsou rovnoběžné s jednou (řídící) rovinou. V praxi je hyperbolický paraboloid velmi často zadán zborceným čtyřúhelníkem.
- Řezem hyperbolického paraboloidu může být hyperbola nebo dvojice různoběžných přímek (v případě tečné roviny). Je-li rovina řezu rovnoběžná s osou paraboloidu, ale není rovnoběžná se žádnou řídící rovinou, je řezem parabola. V případě rovnoběžnosti roviny řezu a jedné z řídících rovin se řez skládá z dvojice přímek, jedné vlastní a druhé nevlastní.

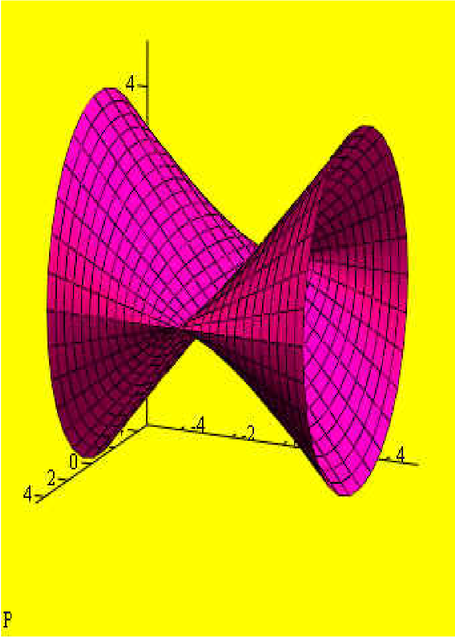
použití v praxi - střecha nad lichoběžníkovým půdorysem (pomocí hyperbolického paraboloidu)



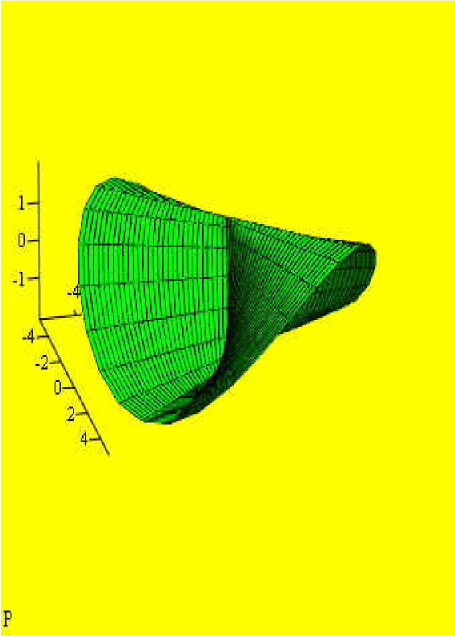


zborcené plochy vyšších stupňů:

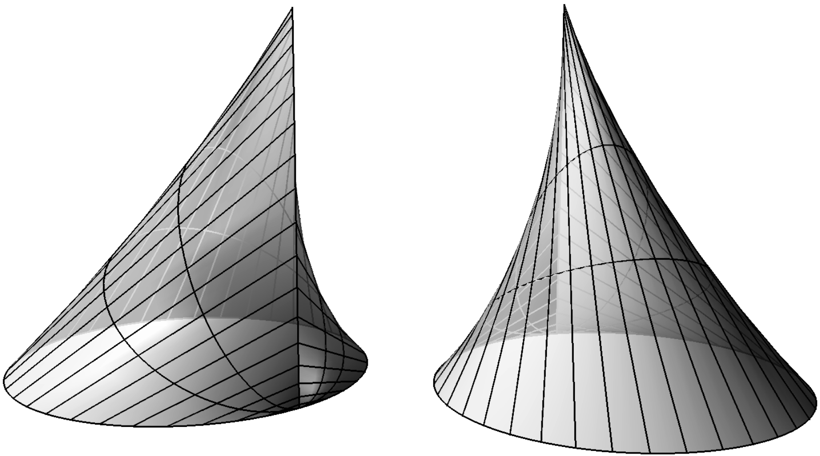
Přímý kruhový konoid



Plückerův konoid

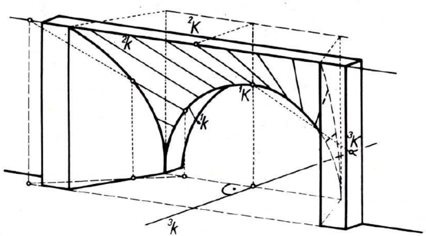


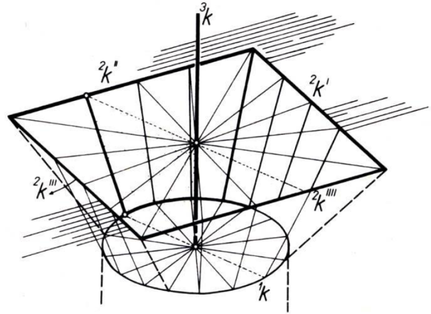
Küpperův konoid

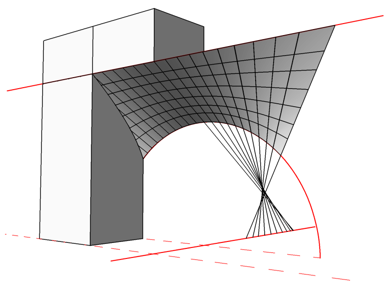


Štramberská trúba:

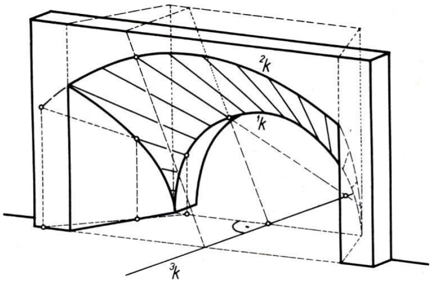
Montpellierský oblouk

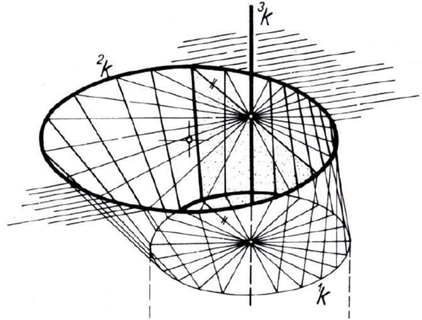




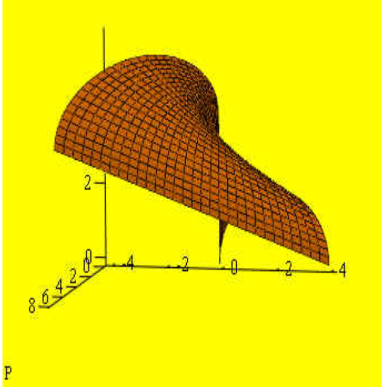


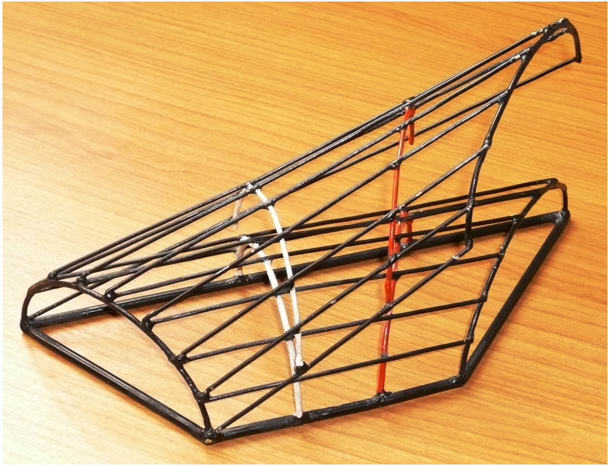
Marseillský oblouk





Frézierův cylindroid





Plocha šikmého průchodu