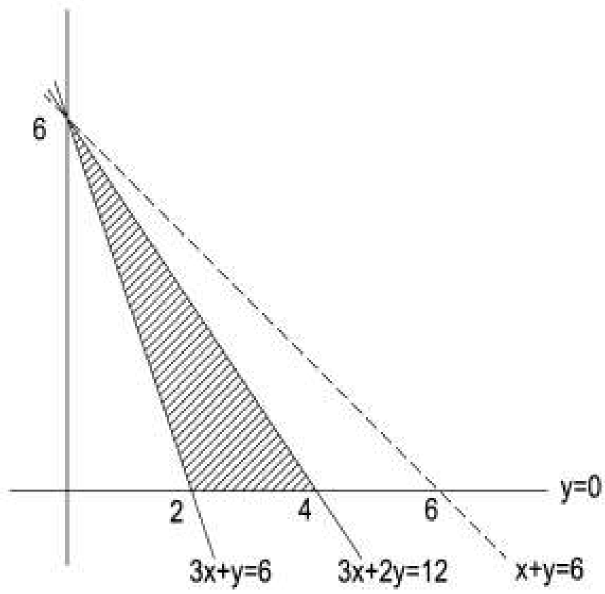
Příklad: Užitím dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami
$y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$, $x + y + z = 6$.

1) Je třeba najít v zadání plochy, které ohraničují těleso shora a zdola, tj. které „obsahují“ z .
Ze zadaných pěti rovin jsou to $z = 0$ a $x + y + z = 6$.

Rovina $z = 0$ ohraničuje těleso zdola, ta druhá shora $\Rightarrow V = \iint\limits_{\Omega} (6 - x - y)\,dxdy$.

Pozn.: Z rovnice roviny jsme explicitně vyjádřili z a tento vztah použili do vzorce pro výpočet objemu.

2) Abychom zjistili Ω, nakreslíme v rovině ($z = 0$) „ostatní“ ze zadání. Tedy v rovině nakreslíme přímky $y = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$. Vznikne trojúhelník, který je v obrázku vyšrafován.



3) Před vymezením oblasti je třeba zjistit průnik „integrované“ plochy s rovinou $z = 0$.

Jestliže do rovnice $x + y + z = 6$ dosadíme $z = 0$, dostaneme $x + y = 6$.
Je to rovnice přímky, kterou přikreslíme do obrázku (je čárkovaně). Je vidět, že nám původní trojúhelník nijak neomezí. Nyní můžeme provést vymezení oblasti

$$\Omega : \quad 0 \le y \le 6$$
$$\frac{6 - y}{3} \le x \le \frac{12 - 2y}{3}$$

Pozn.: Je to výhodnější, než vymezit pro konstantní *x* z intervalu (0,2) a (2,4).

$$V=\int_0^6 \mathrm{d}y \int_{\frac{6-y}{3}}^{\frac{12-2y}{3}} (6-x-y)\,\mathrm{d}x=\int_0^6 \left[6x-\frac{x^2}{2}-xy\right]_{\frac{6-y}{3}}^{\frac{12-2y}{3}} \mathrm{d}y=$$

… po integraci vzhledem k proměnné x, dosadíme za x meze …

$$=\int_0^6 \left[6\frac{12-2y}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{12-2y}{3}\right)^2-\frac{12-2y}{3}y-\left(6\frac{6-y}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{6-y}{3}\right)^2-\frac{6-y}{3}y\right)\right]\mathrm{d}y=$$

… před další integrací funkci upravíme …

$$=\int_0^6 \left[24-4y-\frac{1}{18}(144-48y+4y^2)-4y+\frac{2}{3}y^2-12+2y+\frac{1}{18}(36-12y+y^2)+\frac{1}{3}(6y-y^2)\right]\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^6 \left[6-4y+2y+\left(-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{18}\right)y^2\right]\mathrm{d}y=\int_0^6 \left(\frac{1}{6}y^2-2y+6\right)\mathrm{d}y=$$

… zbývá zintegrovat vzhledem k y…

$$=\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{y^3}{3}-2\cdot\frac{y^2}{2}+6y\right]_0^6=\frac{36}{3}-36+36=12\ .$$

Objem daného tělesa je tedy 12 j^3.

Poznámka: Pokud jste zvědaví, jak těleso vypadá, můžete si ho načrtnout.
Nezapomeňte, že na nakreslení roviny je nejvhodnější úsekový tvar $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$.