Předpokládejme, že zvládáte parciální derivace a víte, že bod B nazveme stacionárním bodem, jestliže vyhovuje rovnicím $f'_x(B)=0$, $f'_y(B)=0$.

Potom je to tím, že máte problém s řešením této soustavy rovnic a v tom případě je následující text pro vás.

1. **Příklad**: Řešte soustavu rovnic
$$3x^2-6y=0$$
$$24y^2-6x=0\ .$$

Jestliže rovnice nejsou lineární, používáme dosazovací metodu. Tedy z jedné z rovnic vyjádříme *x* nebo *y* a dosadíme do druhé. Tím dostaneme rovnici pro jednu neznámou… (znáte z řešení soustav lineárních rovnic). Snažíme se vyhýbat umocňování a odmocňování.

Řešení: Vyjádříme neznámou *x* ze 2. rovnice $6x=24y^2$

$x=4y^2$ a dosadíme do první:

$3\left(4y^2\right)^2-6y=0$ … upravíme

$3\cdot 16y^4-6y=0$ … vytkneme *y*

$y\cdot(48y^3-6)=0$ … součin je roven 0, když alespoň jeden z činitelů je = 0,

takže 1) $y=0$ nebo 2) $48y^3-6=0$

$$48y^3=6$$
$$y^3=\frac{1}{8}\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{2}$$

Zbývá pro jednotlivé možnosti dopočítat *x*.

Pro $y=0$ je $x=4\cdot 0$

$x=0 \quad \Rightarrow \quad [0,0]$

Pro $y=\frac{1}{2}$ je $x=4\cdot\frac{1}{4}$

$x=1 \quad \Rightarrow \quad \left[1,\frac{1}{2}\right]$. Soustava má dvě řešení, $[0,0]$ a $\left[1,\frac{1}{2}\right]$.

2. **Příklad**: Řešte soustavu rovnic
$$6x-2\sqrt{y}-8=0$$
$$\frac{-x}{\sqrt{y}}+1=0\ .$$

Řešení: Vzhledem k tomu, že v obou rovnicích je neznámá *y* pouze pod odmocninou, mohli bychom vyjádřit z jedné z rovnic $\sqrt{y}$ a dosadit do druhé rovnice, ale vhodnější bude vyjádřit x ze druhé rovnice.

Je-li $\frac{-x}{\sqrt{y}}+1=0$, potom $\frac{x}{\sqrt{y}}=1 \Leftrightarrow x=\sqrt{y}$. Nyní dosadíme do první rovnice a vypočítáme *y* :

$$6\sqrt{y}-2\sqrt{y}-8=0$$
$$4\sqrt{y}=8$$
$$\sqrt{y}=2$$
$$y=4 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

Soustava má jediné řešení, je jím uspořádaná dvojice $\left[2,4\right]$.

3. Příklad: Řešte soustavu rovnic
$$\frac{3}{x}-\frac{1}{12-x-y}=0$$
$$\frac{2}{y}-\frac{1}{12-x-y}=0 \ .$$

Řešení: Nejdříve rovnice upravíme tak, aby neobsahovaly zlomky. Chcete-li to hned zkusit sami, bude výpočet přehlednější, když si rovnice upravíte převedením jednoho zlomku na pravou stranu rovnice. Tady budu upravovat, jak jsou zadány:

$$\frac{3}{x}-\frac{1}{12-x-y}=0 \quad / \cdot x\cdot(12-x-y)$$
$$\frac{2}{y}-\frac{1}{12-x-y}=0 \quad / \cdot y\cdot(12-x-y)$$

$$3(12-x-y)-x=0$$
$$2(12-x-y)-y=0$$

$$36-3x-3y-x=0$$
$$24-2x-2y-y=0$$
… rovnice jsou lineární, proto je upravíme jak bývá zvykem …

$$-4x-3y=-36$$
$$-2x-3y=-24$$

Vzhledem ke koeficientům soustavy můžeme rovnice odečíst, tím eliminujeme *y* a vypočteme *x.*

$$-4x-3y=-36 \quad /\cdot(-1)$$
$$-2x-3y=-24$$

$$2x=12 \ \Leftrightarrow \ x=6$$

Neznámou y můžeme dopočítat také sčítací metodou (když 2. rovnici vynásobíme –2 a rovnice sečteme) nebo dosazením *x*:

$$3y=24-2x$$
$$3y=24-12$$
$$3y=12 \ \Leftrightarrow \ y=4$$

Soustava má jediné řešení $\left[6,4\right]$.

4. Příklad: Řešte soustavu rovnic $e^{x-y}\left(10x-4x^2+2xy-2\right)=0$

$$e^{x-y}\left(2x-y-4\right)=0\ .$$

Řešení: Protože $e^{x-y}\neq 0$ (vždy!), zjednodušíme rovnice tak, že obě e^{x-y} vydělíme. Potom

$$10x-4x^2+2xy-2=0$$
$$2x-y-4=0$$

Ze druhé rovnice vyjádříme y … $y=2x-4$ a dosadíme do první rovnice:

$$10x-4x^2+2x(2x-4)-2=0$$
$$10x-4x^2+4x^2-8x-2=0$$
$$2x=2 \quad\Rightarrow\quad x=1 \quad\Rightarrow y=-2$$

Řešením dané soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $\left[1,-2\right]$.

5. Příklad: Řešte soustavu rovnic $2y-2xy=0$

$$6x^2-y^2+10x=0\ .$$

Řešení: Ze druhé rovnice bychom y vyjádřili s odmocninou, proto se zaměříme na první rovnici. Na první pohled se zdá vhodné vyjádřit x. $2xy=2y\ \Rightarrow x=\dfrac{2y}{2y}$. Tedy pro $y\neq 0$ je $x=1$ a museli bychom zjistit, jak proběhne výpočet pro $y=0$.

V takových případech (kdy se jedna z neznámých vyjádří ve tvaru zlomku s druhou neznámou ve jmenovateli) je vhodnější upravit rovnici vytýkáním na součin.

$$2y-2xy=0$$
$$2y(1-x)=0$$

Tento součin bude roven 0, když buď $2y=0$ nebo $1-x=0$

$$y=0 \qquad\qquad x=1\ .$$

Obě tyto možnosti postupně dosadíme do druhé rovnice. Tedy

1) $y=0 \ \Rightarrow\ 6x^2+10x=0$

$$x(6x+10)=0$$
$$x=0 \ \vee\ 6x=-10$$
$$x=-\frac{5}{3}$$

… Dostáváme dvě řešení $\left[0,0\right]$ a $\left[-\dfrac{5}{3},0\right]$.

2) $x=1 \ \Rightarrow\ 6-y^2+10=0$

$$y^2=16$$
$$y=\pm 4$$

… další dvě řešení jsou $\left[1,4\right]$ a $\left[1,-4\right]$.

Zadaná soustava rovnic má 4 řešení.

6. Příklad: Řešte soustavu rovnic $3y^2 - 3 = 0$

$$x^3 - 2x = 0 \quad .$$

Řešení: V každé z rovnic je zastoupena pouze jedna z neznámých, ale je to soustava, tedy řešením je uspořádaná dvojice $[x, y]$!

Z první rovnice $3y^2 = 3$

$$y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1$$

(Pozn.: Teď byste tyto hodnoty dosadili do druhé rovnice … výsledek bude pro obě hodnoty stejný, protože druhá rovnice *y* neobsahuje.)

$$x^3 - 2x = 0$$
$$x(x^2 - 2) = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

Máme tedy 3 hodnoty pro $y = 1$ a 3 hodnoty pro $y = -1$. Soustava má 6 řešení:
$[0,1]$, $[\sqrt{2},1]$, $[-\sqrt{2},1]$, $[0,-1]$, $[\sqrt{2},-1]$, $[-\sqrt{2},-1]$.