I. Úpravy mocnin a odmocnin

Příklad: Vypočtěte $\dfrac{\left(8^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(25^{\frac{3}{4}} \cdot 4^{\frac{1}{4}}\right)^{2}}$

Řešení: Využijeme základní pravidla pro počítání s mocninami. Při násobení mocnin se stejným základem exponenty sečteme, při dělení odečteme a při umocňování mocniny exponenty vynásobíme. Nejdříve je ale musíme upravit na „stejný základ“. Základy mocnin budou v tomto případě čísla 2 a 5. Tedy

$$\frac{\left(\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(\left(5^2\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(2^2\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{2}} = \frac{\left(2^2 \cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(5^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{2}} = \frac{2^{-6} \cdot 5^{\frac{3}{2}}}{5^3 \cdot 2^1} = 2^{-6-1} \cdot 5^{\frac{3}{2}-3} = 2^{-7} \cdot 5^{-\frac{3}{2}}.$$

Výpočet (úpravy exponentů) jsme mohli provést v jednom kroku. Výsledek je možné zapsat i v jiném tvaru. Např. $2^{-7} \cdot 5^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{2^7 \cdot \sqrt{5^3}} \doteq 6{,}988$.

Vyzkoušejte **další příklady**: 1. Vypočtěte $\dfrac{\sqrt{6} \cdot 8^2}{\sqrt[4]{4} \cdot 12^{-1}} : \sqrt[3]{\dfrac{8}{9}}$ $\left[2^7 \cdot \sqrt[6]{3^{13}}\right]$

2. Vypočtěte $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\sqrt{3}\right)^4 - \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ $\left[\dfrac{143}{12}\right]$

3. Vypočtěte $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8 \cdot \sqrt{64}}}$ $\left[\sqrt{2}\right]$

4. Vypočtěte $\left(\sqrt[3]{9^2} \cdot \sqrt[5]{3^2} : \sqrt{27}\right)^6$ $\left[\sqrt[5]{3^7} = 3 \cdot \sqrt[5]{9}\right]$

5. Upravte $\left(\dfrac{x^2 y^3}{z^{-3}}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{x^{-3} z^2}{y^4}\right)^{-1}$ $\left[x^7 y^{10} z^4\right]$

6. Upravte $\dfrac{\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a}}}{\sqrt[4]{a^3}}$ $\left[\dfrac{1}{\sqrt[12]{a}}\right]$

7. Upravte $\dfrac{x^{\frac{2}{3}} \cdot \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{12}}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{8}{3}} \cdot x^{\frac{5}{6}}}$ $\left[x^{\frac{19}{6}}\right]$

II. Úpravy algebraických výrazů

Příklad: Upravte $\dfrac{2}{1+\sqrt{x}} - \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{x+2}{1-x}$.

Řešení: Zlomky převedeme na společného jmenovatele. Bude jím výraz $1-x$. Použijeme-li totiž vzorec pro rozklad a^2-b^2, dostaneme $1-x=(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$. Jmenovatel 1. zlomku je v tomto součinu obsažen a jmenovatel druhého také, až na znaménko. Proto čitatele druhého zlomku vynásobíme (kromě $1+\sqrt{x}$) ještě (–1).

Dostaneme $\dfrac{2}{1+\sqrt{x}} - \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{x+2}{1-x} = \dfrac{2(1-\sqrt{x})-(-1)(1+\sqrt{x})^2-(x+2)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$

První zlomek jsme rozšířili $(1-\sqrt{x})$, druhý zlomek výrazem $(-1)(1+\sqrt{x})$ a třetí jsme jen opsali.

Nyní odstraníme závorky v čitateli a sečteme vzniklé členy.

$$= \frac{2-2\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}+x-x-2}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$$

Protože v čitateli už není člen, který by ještě umožnil krácení, přepíšeme jmenovatel v původním tvaru.

Výsledek je tedy $\dfrac{1}{1-x}$. Aby měl výraz a jeho úpravy smysl, je třeba stanovit podmínky.

S ohledem na definici druhé odmocniny musí platit $x \geq 0$ a aby byl jmenovatel každého zlomku $\neq 0$, musí být $x \neq 1$.

Závěr : $\dfrac{2}{1+\sqrt{x}} - \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{x+2}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$, pro $x \geq 0, x \neq 1$.

Příklad: Zjednodušte $\left(\dfrac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2} - \dfrac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2}\right) \cdot \left(\sqrt{a} - \dfrac{4}{\sqrt{a}}\right)$.

Řešení: Stanovíme podmínky, kdy má výraz smysl. Druhá odmocnina je definována pro $a \geq 0$. Protože ve jmenovateli zlomku nesmí být 0, musí platit $a \neq 4, a \neq 0$.

Celkem $a > 0$, $a \neq 4$.

Výrazy v závorkách převedeme na společné jmenovatele, potom upravíme čitatele:

$$\left(\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2}\right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}}\right) = \frac{\left(\sqrt{a}+2\right)^2 - \left(\sqrt{a}-2\right)^2}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)} \cdot \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2-4}{\sqrt{a}} =$$

$$= \frac{a+4\sqrt{a}+4-\left(a-4\sqrt{a}+4\right)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)} \cdot \frac{a-4}{\sqrt{a}} = \frac{8\sqrt{a}}{a-4} \cdot \frac{a-4}{\sqrt{a}} = 8.$$ Výsledek jsme získali krácením.

Příklad: Upravte $\dfrac{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{x}{1+x}}{\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}}$.

Řešení: Zlomky v čitateli i jmenovateli složeného zlomku upravíme na společné jmenovatele, potom zjednodušíme složený zlomek a provedeme krácení.

$$\frac{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{x}{1+x}}{\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}}=\frac{\dfrac{1+x-x(1-x)}{(1-x)(1+x)}}{\dfrac{x(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)}}=\frac{\dfrac{1+x-x+x^2}{1-x^2}}{\dfrac{x+x^2+1-x}{1-x^2}}=\frac{(1+x^2)(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}=1.$$

Platí pro všechna $x\in R-\{-1,1\}$.

Další příklady: Upravte

1. $\dfrac{2a-1}{a+3}-\dfrac{4a-1}{6+2a}-\dfrac{1{,}5}{3a+a^2}$ $\qquad -\dfrac{1}{2a}$, $a\neq 0, a\neq -3$

2. $\left(y+\dfrac{x-y}{1+xy}\right):\left(1-\dfrac{y(x-y)}{1+xy}\right)$ $\qquad$ x, $xy\neq -1$

3. $\dfrac{4x}{x-1}-\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$ $\qquad \dfrac{1}{1-x}$, $x\geq 0$, $x\neq 1$

4. $\left(1+\dfrac{a}{1+a}\right):\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right)$ $\qquad \dfrac{1-a}{1-2a}$, $a\neq \dfrac{1}{2}, a\neq \pm 1$

5. $\left(\dfrac{1}{1-a}-\dfrac{1}{1+a}\right)\cdot\dfrac{(1-a)^2}{a^2-a}$ $\qquad \dfrac{-2}{1+a}$, $a\neq 0, a\neq \pm 1$

6. $\dfrac{(y^2-2y+1)\cdot\left(\dfrac{1}{y^2}+1\right)}{\dfrac{1-y^4}{y^2}}$ $\qquad \dfrac{1-y}{1+y}$, $y\neq 0, y\neq \pm 1$

7. $\left(\dfrac{a^2}{b}+b\right):\left[\dfrac{a}{1-\dfrac{a}{a-b}}\cdot\left(\dfrac{ab}{b-a}-a\right)\right]$ $\qquad \dfrac{a^2+b^2}{a^3}$, $a\neq 0, b\neq 0, a\neq b$

8. $\dfrac{1+m}{m+2}\cdot\dfrac{\dfrac{m-2}{m}+\dfrac{m}{2-m}}{\dfrac{m^2-1}{m^2-4}}$ $\qquad -\dfrac{4}{m},\ m\neq 0, m\neq \pm 1, m\neq \pm 2$

9. $\dfrac{\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{2y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)}{\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{y^2}{x^2}}$ $\qquad \dfrac{x-y}{x+y},\ x,y\neq 0, x\neq \pm y$

III. Úpravy goniometrických výrazů

Příklad: Zjednodušte $\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x-\cos x}-\cos x$. Předpokládejte, že výraz má smysl.

Poznámka: Ze zadání plyne, že se od nás neočekává stanovení podmínek, pro která *x* je definován uvedený zlomek. Hledání podmínek pro výrazy s goniometrickými funkcemi vede na řešení goniometrických rovnic, příp. nerovnic a toto řešení je často velmi pracné. Proto ani u řešení goniometrických rovnic většinou nezačínáme podmínkami, ale raději pro všechna nalezená řešení provedeme zkoušku.

Řešení: Nejčastěji používané vzorce pro úpravy jsou

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$
$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

Pamatujete-li si další vztahy, mohou se hodit při jiné příležitosti.

V tomto příkladě ale nevyužijeme žádný z nich. Použijeme vzorec $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$$\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x-\cos x}-\cos x=\frac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}{\sin x-\cos x}-\cos x=\text{…vykrátíme…}$$

$$=\sin x+\cos x-\cos x=\sin x\ .$$

Příklad: Za předpokladu, že je výraz definován, zjednodušte $\dfrac{1+\mathrm{tg}^2 x}{\mathrm{tg}x}$.

Řešení: Přepíšeme funkci tg x pomocí sin x a cos x . Potom budeme upravovat složený zlomek.

$$\frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{\mathrm{tg}x}=\frac{1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{cosx}}}=\frac{\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{cosx}}}=\frac{(\cos^2 x+\sin^2 x)\cos x}{\cos^2 x\cdot\sin x}=\frac{1\cdot\cos x}{\cos^2 x\cdot\sin x}=$$

$=\dfrac{1}{\cos x\cdot\sin x}$. V tomto tvaru můžeme výsledek ponechat. Kdybychom zlomek rozšířili 2, mohli bychom jmenovatel upravit ještě podle vzorce pro sin2x.

$$\frac{1}{\cos x\cdot\sin x}=\frac{2}{2\cdot\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}.$$

Další příklady :

1. $\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{\sin x-\sin^3 x}$ $\qquad$ $\mathrm{tg}x$

2. $\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ $\qquad$ $\mathrm{tg}^2 x$

3. $\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x-\cos^2 x}$ $\qquad$ $2\mathrm{cotg}x$

4. $\dfrac{1+\cos 2x}{\sin 2x}$ $\qquad$ $\mathrm{cotg}x$

5. $\dfrac{\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2}\sin 2x$

6. $\dfrac{\cos 2x-\cos^2 x}{1+\cos 2x}\cdot\mathrm{cotg}\,x$ $\qquad$ $-\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}x$

7. $\dfrac{(1+\mathrm{tg}x)^2}{1+\mathrm{tg}^2 x}$ $\qquad$ $1+\sin 2x$

8. $\dfrac{\mathrm{tg}^2 x+1}{\mathrm{cotg}^2 x+1}$ $\qquad$ $\mathrm{tg}^2 x$

9. $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-(\sin 2x+\sin^2 x)}{(\sin x-\cos x)^2+\sin 2x}$ $\qquad$ $\cos^2 x$