Poznámka. Lineární rovnice (s ohledem na nejrozšířenější chyby v písemkách):

$$ax + b = 0 \quad / \; -b \qquad\qquad \text{Např.: } 3x - 2 = 0 \quad / \; +2 \qquad \text{nebo} \qquad -5x = 0 \quad / \; :(-5)$$

$$ax \quad = -b \quad / \; :a \qquad\qquad 3x \quad = 2 \quad / \; :3 \qquad\qquad x = \frac{0}{-5}$$

$$x \quad = \frac{-b}{a} \qquad\qquad x \quad = \frac{2}{3} \qquad\qquad x = 0 \quad !!!$$

Příklad: Řešte rovnici $\dfrac{1}{2+x} - \dfrac{2+x}{3} = \dfrac{3-2x}{6}$ v $\boldsymbol{R}$.

Podmínky řešitelnosti: $2 + x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq -2$

Odstraníme zlomky, tj. vynásobíme rovnici společným jmenovatelem všech zlomků,
$6(2+x)$: $\quad 6 - 2(2+x)(2+x) = (3-2x)(2+x)$
Potom roznásobíme závorky : $\quad 6 - 2\left(4 + 4x + x^2\right) = 6 + 3x - 4x - 2x^2$
a sečteme výrazy, které se dají sečíst: $\quad -2 - 8x - 2x^2 = 6 - x - 2x^2$.
Členy s neznámou převedeme na levou stranu rovnice: $\quad -7x = 8$

$$x = -\frac{8}{7}$$

Řešení vyhovuje počáteční podmínce.

Další příklady:

1. $2(x-4) - 3(2x-1) = 13 - 2x$ $\qquad [x = -9]$

2. $(4x+5)^2 = (8x-1)(2x+5)$ $\qquad [x = -15]$

3. $\dfrac{x+5}{3} - \dfrac{x-3}{4} = 2$ $\qquad [x = -5]$

4. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{3x} + \dfrac{3}{4x} = \dfrac{1}{12}$ $\qquad [x = 29]$

5. $\dfrac{3}{4x-5} = \dfrac{2}{2x-3}$ $\qquad \left[x = \dfrac{1}{2}\right]$

6. $\dfrac{x-4}{1-2x} = -\dfrac{x-3}{2x-5}$ $\qquad \left[x = \dfrac{17}{6}\right]$

Řešení soustav dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

Řešením soustavy je průnik řešení jednotlivých rovnic, tedy dvojice čísel, která vyhovují současně oběma rovnicím.
Na střední škole jste se učili řešit soustavu metodou sčítací nebo dosazovací. Při použití těchto metod vyloučíme jednu neznámou a potom řešíme rovnici o jedné neznámé.

Poznámka: Soustavy lineárních rovnic o více neznámých je vhodné řešit pomocí maticového počtu.

Příklad: Řešte soustavu rovnic

$$2x + 3y = 4$$
$$5x + 6y = 1$$

1) metoda dosazovací: např. z 1. rovnice vyjádříme x a dosadíme do druhé rovnice:

$$2x = 4 - 3y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4-3y}{2}$$

$$5 \cdot \frac{4-3y}{2} + 6y = 1$$

Je to lineární rovnice pro neznámou y, kterou vyřešíme:

$$5 \cdot \frac{4-3y}{2} + 6y = 1 \quad / \cdot 2$$
$$5(4-3y) + 12y = 2$$
$$20 - 15y + 12y = 2$$
$$-3y = -18 \;\; / : (-3)$$
$$y = 6$$

Druhou neznámou vypočítáme dosazením y do vztahu pro x :

$$x = \frac{4 - 3 \cdot 6}{2}$$
$$x = \frac{4-18}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

Řešením této soustavy je dvojice čísel $(x, y) = (-7{,}6)$. Mohli bychom provést zkoušku dosazením vypočítaných hodnot do původní soustavy.

2) metoda sčítací: jednu nebo obě rovnice vhodně vynásobíme, aby po sečtení zůstala jen jedna neznámá. V tomto konkrétním případě bude vhodné vynásobit 1. rovnici (–2) a tím eliminovat y

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 4 \;/\cdot(-2) \\ 5x + 6y = 1 \\ \hline -4x - 6y = -8 \\ 5x + 6y = 1 \\ \hline x = -7 \end{array}$$

Druhou neznámou bychom mohli dostat podobným způsobem. Kdybychom vynásobili 1. rovnici 5 a druhou –2, dostali bychom po sečtení vztah pro y.

Obvykle je rychlejší dosadit vypočítanou neznámou do jedné ze dvou rovnic soustavy:

$$2 \cdot (-7) + 3y = 4$$
$$-14 + 3y = 4$$
$$3y = 18$$
$$y = 6$$

Příklad: Řešte soustavu rovnic

$$2x - 3y = \frac{1}{2}$$
$$3(x - y) + 1 = 2(3 - x) - y$$

Nejdříve úpravami zjednodušíme. Odstraníme zlomek v 1. rovnici a závorky ve 2., potom sečteme odpovídající členy.

$$2x - 3y = \frac{1}{2} \;/\cdot 2$$
$$\underline{3x - 3y + 1 = 6 - 2x - y}$$
$$4x - 6y = 1$$
$$5x - 2y = 5$$

Dále budeme řešit metodou sčítací:

$$4x - 6y = 1$$
$$\underline{5x - 2y = 5 \;/\cdot (-3)}$$
$$-11x \quad = -14 \;/ : (-11)$$
$$x = \frac{14}{11}$$

Neznámou y dopočítáme dosazením x do 1. zadané rovnice:

$$2 \cdot \frac{14}{11} - 3y = \frac{1}{2}$$
$$-3y = \frac{1}{2} - \frac{28}{11}$$
$$-3y = -\frac{45}{22} \;/ : (-3)$$
$$y = \frac{15}{22}$$

Řešením je uspořádaná dvojice $\left(\frac{14}{11}, \frac{15}{22}\right)$.

Příklad: Řešte soustavu rovnic

$$2x + 1{,}5 = y$$
$$5(x - y) + 7x = y - 9$$

Vzhledem ke tvaru 1. rovnice, budeme řešit dosazovací metodou. Dosadit do 2. rovnice za y můžeme přímo a rovnici upravíme až po dosazení:

$$5(x - 2x - 1{,}5) + 7x = 2x + 1{,}5 - 9$$
$$5(-x - 1{,}5) + 5x = -7{,}5$$
$$-5x - 7{,}5 + 5x = -7{,}5$$
$$0x = 0$$

To znamená, že rovnice platí pro libovolné $x \in \boldsymbol{R}$.

Soustava má tedy **nekonečně mnoho řešení.** Rovnicím vyhovuje každá uspořádaná dvojice $(x\ ; 2x + 1{,}5)$, kde $x \in \boldsymbol{R}$.

Příklad: Řešte soustavu rovnic
$$8x-6y=4$$
$$\frac{2x}{3}=\frac{y}{2}$$

Nejdříve upravíme 2. rovnici. Vynásobíme obě strany 6, čímž odstraníme zlomky a převedeme y na levou stranu rovnice. Potom
$$\begin{aligned}8x-6y&=4\\4x-3y&=0\end{aligned}$$

Použijeme metodu sčítací:
$$\begin{aligned}8x-6y&=4\\4x-3y&=0\ /\cdot(-2)\\\hline 0&=4\end{aligned}$$

Tento vztah jistě neplatí pro žádnou hodnotu x nebo y, proto zadaná soustava rovnic **nemá řešení.**

Příklady na procvičení:

1. Řešte soustavy rovnic

a) $\begin{aligned}-4x+5y&=-1\\2x-6y&=-3\end{aligned}$ $\left[\left(\frac{3}{2},1\right)\right]$

b) $\begin{aligned}0{,}1x-0{,}3y&=-0{,}5\\0{,}2x+0{,}6y&=2{,}2\end{aligned}$ $\left[\left(3,\frac{8}{3}\right)\right]$

c) $\begin{aligned}\frac{y}{2}-\frac{3z}{5}&=-\frac{7}{5}\\\frac{y}{3}+\frac{2z}{6}&=2\end{aligned}$ $\left[(2,4)\right]$

d) $\begin{aligned}u-\frac{2}{3}v&=0{,}2\\3u&=\frac{4v}{3}-1\end{aligned}$ $\left[\left(-\frac{7}{5},-\frac{12}{5}\right)\right]$

2. Řešte soustavy rovnic

a) $\begin{aligned}3a+2b&=1\\\frac{a+2}{4}&=\frac{1-b}{2}+2\end{aligned}$ $\left[\left(-\frac{7}{2},\frac{23}{4}\right)\right]$

b) $\begin{aligned}2(3a+4b)&=4(2a-b)\\\frac{a-b}{5}&=a+b-1\end{aligned}$ $\left[\left(1,\frac{1}{6}\right)\right]$

c) $\begin{aligned}2x-\frac{4-y}{3}&=\frac{1}{2}\\2(x-2y)&=3(y+1)-3\end{aligned}$ $\left[\left(\frac{7}{8},\frac{1}{4}\right)\right]$

d) $\begin{aligned}3(x+y)&=2(y-1)\\y&=x+\frac{4y+2}{3}\end{aligned}$ $\left[(x,-2-3x),x\in R\right]$

3. Řešte soustavy rovnic

a) $\begin{aligned}\frac{x+1}{2-y}&=1\\\frac{1}{x+1}&=\frac{3}{y-2}\end{aligned}$ $[\textit{nemá řeš.}]$

b) $\begin{aligned}\frac{2x+3}{4y}&=-2\\3-x&=3(x-2y+1)\end{aligned}$ $\left[\left(-\frac{9}{22},-\frac{3}{11}\right)\right]$

c) $\begin{aligned}4(2x-y)&=3(y+5x)\\\frac{x-1}{y+4}&=\frac{1}{5}\end{aligned}$ $\left[\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)\right]$

d) $\begin{aligned}\frac{3x-y}{3}&=x-2(1-y)\\\frac{8-x}{y+2}-7&=0\end{aligned}$ $\left[\left(-12,\frac{6}{7}\right)\right]$