Kvadratická rovnice

Úplná kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má kořeny $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

kde $b^2 - 4ac = D$ je diskriminant.

Kvadratická rovnice má vždy <u>dva kořeny</u> (v komplexním oboru).

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
reálné různé kořeny	reálné splývající kořeny	komplexně sdružené kořeny
$x_1 \neq x_2$	$x_1 = x_2$	$x_1 = u + iv$ $x_2 = u - iv$

Rozklad na součin kořenových činitelů: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Řešení kvadratické rovnice, která není úplná:

1) Nemá-li absolutní člen, vytýkáním upravíme na součin. Ten je roven nule, pokud alespoň jeden z činitelů je roven nule:

$$ax^2 + bx = 0$$
$$x(ax + b) = 0$$
$$x_1 = 0 \ \vee \ ax + b = 0$$
$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

2) Nemá-li lineární člen (tzv. ryze kvadratická) se dá řešit rozkladem nebo vyjádříme x^2 a odtud odmocněním řešení:

$$ax^2 + c = 0$$
$$x^2 = -\frac{c}{a}$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Řešené příklady:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{array}$$

Pro informaci: Rozklad na součin kořenových činitelů je $(x - 3)(x - 2) = 0$.

2) $3x^2+5x-2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{-5\pm 7}{6}\quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x_1&=\frac{2}{6}=\frac{1}{2}\\ x_2&=\frac{-12}{6}=-2\end{aligned}$$

3) $5x^2+2x+2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 10}}{10}=\frac{-2\pm\sqrt{-36}}{10}=\frac{-2\pm i\sqrt{36}}{10}=\frac{-2\pm 6i}{10}\quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x_1&=\frac{-2}{10}+\frac{6}{10}i\\ x_2&=\frac{-2}{10}-\frac{6}{10}i\end{aligned}$$

V tomto případě je vhodnější zápis $x_{1,2}=-\frac{1}{5}\pm\frac{3}{5}i$.

4) $x^2-2x+8=0$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-32}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-28}}{2}=\frac{2\pm i\sqrt{28}}{2}=\frac{2\pm i\cdot 2\sqrt{7}}{2}\quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x_{1,2}&=\frac{2}{2}\pm\frac{2\sqrt{7}}{2}i\\ x_{1,2}&=1\pm\sqrt{7}i\end{aligned}$$

5) $6x^2+7x=0$

$x\cdot(6x+7)=0\Rightarrow$ buď $x=0$ nebo $6x+7=0$

$$6x=-7$$

$$x=-\frac{7}{6}$$

6) $2x-3x^2=0$

$x\cdot(2-3x)=0\Rightarrow$ buď $x_1=0$ nebo $2-3x=0$

$$-3x=-2$$

$$x_2=\frac{2}{3}$$

7) $4-x^2=0$

$$-x^2=-4$$

$$x^2=4$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{4}\quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\pm 2$$

nebo rozkladem:

$$(2-x)(2+x)=0$$

$$2-x=0\ \vee\ 2+x=0$$

$$x_1=2\qquad x_2=-2$$

8) $4x^2+9=0$

$4x^2=-9\quad\Rightarrow x^2=-\frac{9}{4}$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{9}{4}}=\pm i\sqrt{\frac{9}{4}}=\pm i\frac{3}{2}$ tedy $x_{1,2}=\pm\frac{3}{2}i$.

Příklady na procvičení:

a) úplné kvadratické rovnice

1. $x^2+7x-8=0$ $[-8,1]$

2. $4x^2+11x-3=0$ $\left[-3,\frac{1}{4}\right]$

3. $-3x^2+2x+1=0$ $\left[-\frac{1}{3},1\right]$

4. $x^2+4x+4=0$ $[x_{1,2}=-2]$

5. $2x^2+2x+1=0$ $\left[x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\right]$

6. $15x^2+8x+1=0$ $\left[-\frac{1}{3},-\frac{1}{5}\right]$

7. $3x^2-12x+13=0$ $\left[x_{1,2}=2\pm\frac{\sqrt{3}}{3}i\right]$

8. $x^2-6x+9=0$ $[x_{1,2}=3]$

9. $x^2+4x+5=0$ $[x_{1,2}=-2\pm i]$

10. $x^2-5x+7=0$ $\left[x_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$

b) neúplné rovnice

1. $x^2-7x=0$ $[0,7]$

2. $x^2-7=0$ $[\pm\sqrt{7}]$

3. $x^2+7=0$ $[\pm i\sqrt{7}]$

4. $9x-x^2=0$ $[0,9]$

5. $4x-12x^2=0$ $\left[1,\frac{1}{3}\right]$

6. $4x^2+3=0$ $\left[x_{1,2}=\pm\, i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

7. $3x^2+4x=0$ $\left[0,-\frac{4}{3}\right]$

8. $4+x^2=0$ $[x_{1,2}=\pm 2i]$

9. $9-3x^2=0$ $[\pm\sqrt{3}]$

10. $3x^2-18x=0$ $[0,6]$

c) ještě pár – pro jistotu …

1. $x^2-7x=-12$ $[3,4]$

2. $x^2=2x$ $[0,2]$

3. $x+1=\frac{12}{x}$ $[3,-4]$

4. $2x-\frac{3}{x}=1$ $\left[\frac{3}{2},-1\right]$

5. $1+\frac{5}{(x-2)(x+3)}-\frac{1}{x-2}=0$ $[x=-2]$…protože pro $x=2$ nemá smysl

6. $\frac{x}{x+2}+\frac{x+2}{x}=\frac{4}{x(x+2)}$ $[\textit{nemá řešení}]$

7. $\frac{x}{x+3}+\frac{x+3}{x}=\frac{5}{x(x+3)}$ $[-2,-1]$