Kvadratická rovnice

Úplná kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má kořeny $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

kde $b^2 - 4ac = D$ je diskriminant.

Kvadratická rovnice má vždy <u>dva kořeny</u> (v komplexním oboru).

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
reálné různé kořeny	reálné splývající kořeny	komplexně sdružené kořeny
$x_1 \neq x_2$	$x_1 = x_2$	$x_1 = u + iv$ $x_2 = u - iv$

Rozklad na součin kořenových činitelů: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Řešení soustav dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

Řešením soustavy je průnik řešení jednotlivých rovnic, tedy dvojice čísel, která vyhovují současně oběma rovnicím.

Poznámka: Soustavy lineárních rovnic o více neznámých je vhodné řešit pomocí maticového počtu.

Příklad: Řešte soustavu rovnic

$$x - 3y = 4$$
$$2x + y = 1$$

1) <u>metoda dosazovací</u>: např. z 1. rovnice vyjádříme *x* a dosadíme do druhé rovnice:

$$x = 4 + 3y \quad \Rightarrow \quad 2(4 + 3y) + y = 1$$

Dostaneme lineární rovnici pro neznámou y, kterou vyřešíme:

$$8 + 6y + y = 1$$
$$7y = -7 \quad / : (7)$$
$$y = -1$$

Druhou neznámou vypočítáme dosazením *y* do vztahu pro *x* :

$$x = 4 + 3(-1)$$
$$x = 1$$

Řešením této soustavy je dvojice čísel $(x, y) = (1, -1)$. Mohli bychom provést zkoušku dosazením vypočítaných hodnot do původní soustavy.

2) <u>metoda sčítací:</u> jednu nebo obě rovnice vhodně vynásobíme, aby po sečtení zůstala jen jedna neznámá. V tomto konkrétním případě bude vhodné vynásobit 1. rovnici (–2) a tím eliminovat *x*

$$\begin{array}{l} x - 3y = 4 \;/\cdot(-2) \\ 2x + \;\; y = 1 \\ \hline -2x + 6y = -8 \\ 2x + \;\; y = 1 \\ \hline \quad 7y = -7 \quad \Rightarrow \quad y = -1 \end{array}$$

Druhou neznámou bychom mohli dostat podobným způsobem. Kdybychom vynásobili 2. rovnici 3, dostali bychom po sečtení vztah pro *x*.
Obvykle je rychlejší dosadit vypočítanou neznámou do jedné ze dvou rovnic soustavy:

$$x - 3\cdot(-1) = 4$$
$$x = 4 - 3$$
$$x = 1$$

Řešení nerovnic

1. Lineární nerovnice

Důležité pravidlo: násobení (dělení) nerovnice záporným číslem obrací znak nerovnosti!

Př. $-6x + 1 \geq 0$

$$-6x \geq -1 \quad / : (-6)$$
$$x \leq \frac{1}{6}$$

Př. $-\frac{x}{2} < 4 \quad /\cdot(-2)$

$$x > -8$$

Př. $3x + 1 \leq 2(x-1) + 6$

$$3x + 1 \leq 2x - 2 + 6$$
$$x \leq 3 \qquad \Rightarrow x \in (-\infty, 3\rangle$$ pokud řešíme v ***R***, $x \in \{1, 2, 3\}$ pokud řešíme v ***N***

2. Nerovnice v podílovém tvaru

Poznámka: Nerovnici nenásobíme výrazem s neznámou! Pokud není nerovnice ve tvaru, kdy na jedné straně je výraz s neznámou a na druhé straně 0, musíme ji upravit! Všechny členy převedeme na jednu stranu nerovnice a upravíme je na společný jmenovatel.

Příklad: Řešte v ***R*** nerovnici $\dfrac{x-4}{6-x} \leq 0$.

Řešení: Máme zjistit, pro jaké hodnoty x je zlomek záporný, příp. roven 0. To bude jistě tehdy, když bude v čitateli nezáporná hodnota a ve jmenovateli záporná nebo naopak v čitateli záporná a ve jmenovateli kladná.
Zápis výpočtu může být různý. Např.:

a) $x-4 \geq 0 \;\wedge\; 6-x < 0 \quad \vee \quad x-4 \leq 0 \;\wedge\; 6-x > 0$

$x \geq 4 \;\wedge\; 6 < x \quad \vee \quad x \leq 4 \;\wedge\; 6 > x$

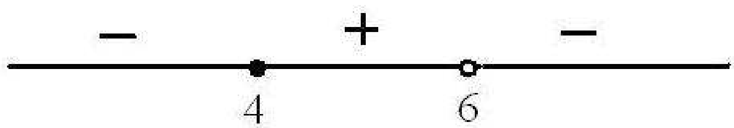
$x > 6 \quad \vee \quad x \leq 4 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty, 4\rangle \cup (6, \infty)$

b) Nulové body čitatele a jmenovatele zlomku rozdělí reálná čísla na 3 intervaly. Budeme se zabývat nejdříve znaménkem čitatele a jmenovatele na těchto intervalech a potom zjistíme znaménko podílu.
Obvykle se toto řešení zapisuje do tabulky:

	$(-\infty,4)$	$(4,6)$	$(6,\infty)$
$x-4$	$-$	$+$	$+$
$6-x$	$+$	$+$	$-$
Podíl	$-$	$+$	$-$

Zlomek má tedy záporné znaménko pro x z prvního a třetího intervalu. Roven 0 je tehdy, je-li čitatel roven 0, tj. pro $x = 4$. Nulový bod jmenovatele do řešení nikdy nepatří!
Závěr: $x \in (-\infty, 4\rangle \cup (6, \infty)$.

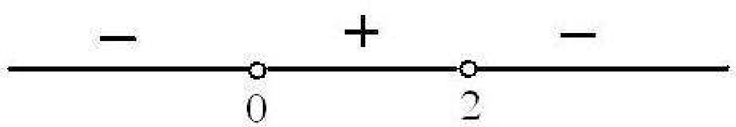
c) Nejrychlejší je nanést nulový bod čitatele a nulový bod jmenovatele na číselnou osu a zjistit znaménko zlomku na vzniklých intervalech



Příklad: $\dfrac{6+x}{2-x} > 3$

$$\frac{6+x}{2-x} - 3 > 0$$

$\dfrac{6+x-3(2-x)}{2-x} > 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{4x}{2-x} > 0$. Znaménko se může měnit pouze v bodech 0 a 2.



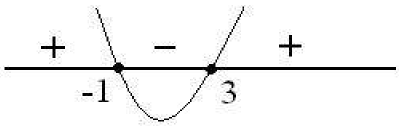
Podíl je kladný na druhém intervalu, nerovnost je splněna pro $x \in (0, 2)$.

3. Kvadratické nerovnice

Nejdříve vypočítáme nulové body kvadratického výrazu, tj. najdeme kořeny rovnice. Napíšeme-li rozklad kvadratického výrazu na součin kořenových činitelů, můžeme řešit analogicky jako podíl. (viz **a-c**). Můžeme použít

d) grafické řešení, vyhneme se dosazování a dopočítávání hodnot.
Načrtneme parabolu, když víme, že pro $a > 0$ má ve vrcholu lokální minimum a pro $a < 0$ má ve vrcholu lokální maximum. Nulové body kvadratického výrazu jsou průsečíky grafu s osou x.
Kde je graf na osou, je výraz kladný, kde je pod osou, je záporný.

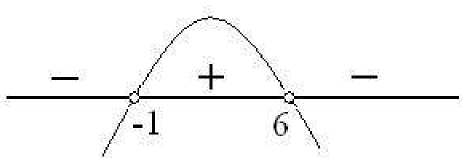
Př. $x^2 - 2x - 3 \geq 0$
$(x+1)(x-3) \geq 0$



$\Rightarrow \quad x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 3, \infty)$.

Př. $6 + 5x - x^2 > 0$

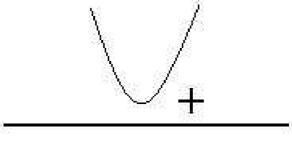
$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{-2} = \frac{-5 \pm 7}{-2} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 6 \end{array}$$



$\Rightarrow \quad x \in (-1, 6)$.

Př. $x^2 + 2x + 4 < 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} \notin R$$



Nerovnice nemá řešení.

4. Soustavy nerovnic

Řešením soustavy je průnik řešení jednotlivých nerovnic.