ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

Definice. Algebraickou rovnicí stupně *n* nazýváme rovnici
$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$
kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $a_0 \neq 0$, $x \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$.

Je-li $a_0 = 1$, hovoříme o **normované algebraické rovnici**

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Řešením (kořenem) algebraické rovnice $P_n(x) = 0$ je každé číslo *c*, které je kořenem polynomu $P_n(x)$. Algebraická rovnice stupně n tedy má právě n kořenů.

<u>**Možnosti řešení**</u> **:** I. Graficky

II. Numericky

Ad I) Graficky můžeme určit pouze reálné kořeny, a to pouze přibližně.

$P_n(x) = 0$ upravíme na tvar $f(x) = g(x)$. Reálné kořeny rovnice $P_n(x) = 0$ jsou pak rovny x-ovým souřadnicím průsečíků křivek $y = f(x)$ a $y = g(x)$.

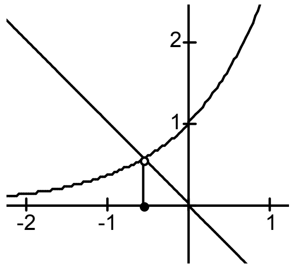
Poznámka. Graficky můžeme řešit i jiné rovnice než algebraické!!

Např. $x + e^x = 0$

$e^x = -x$

$x \in (-1, 0)$

$x \approx -0{,}5$



Ad II) Numerické řešení (Pomocí vzorců, rozkladem na součin kořenových činitelů, pomocí Hornerova schématu, přibližné numerické metody.)

Numerické řešení algebraické rovnice

Při řešení většiny algebraických rovnic stupně $n \geq 3$ je nutné použít přibližné metody. Ty umožňují aproximovat reálné kořeny s libovolnou přesností. Postup při výpočtu můžeme rozdělit do 3 kroků.

1. Ohraničení kořenů a určení jejich počtu

Věta. Pro všechny kořeny x_i normované algebraické rovnice $P_n(x) = 0$ platí $|x_i| < 1 + A$, kde $A = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$.

Věta. Počet kladných reálných kořenů (počítaných i s jejich násobností) algebraické rovnice $P_n(x) = 0$, je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nebo o sudé číslo menší.

Počet záporných reálných kořenů dostaneme, když místo polynomu $P(x)$ budeme uvažovat polynom $P(-x)$. V obou případech vynecháme nulové koeficienty.

Věta. Algebraická rovnice lichého stupně má alespoň 1 reálný kořen.

2. Separace kořenů

Separací kořenů rozumíme nalezení takových intervalů, v nichž leží právě 1 kořen.

Je-li $P(a) \cdot P(b) < 0$, leží v intervalu (a, b) lichý počet kořenů rovnice $P_n(x) = 0$. Tento kořen bude jediný, jestliže $P'(x)$ nemění v (a, b) znaménko.

Budeme tedy hledat interval, v jehož krajních bodech má polynom $P(x)$ opačná znaménka. A to tak, že interval, ve kterém leží reálné kořeny rovnice, rozdělíme na menší podintervaly a budeme počítat hodnoty $P(x)$ v dělicích bodech.

3. Aproximace kořenů

Pro zpřesnění kořene můžeme například použít metodu půlení intervalu. Interval $\langle a, b \rangle$, ve kterém leží právě jeden kořen rozpůlíme. Vybereme tu část $\langle a_i, b_i \rangle$, kde v krajních bodech má polynom opačná znaménka. Vybraný interval rozpůlíme, atd. Je-li $\langle a_i, b_i \rangle$ poslední získaný interval, je hledaný kořen $x \doteq \frac{a_i + b_i}{2}$.

Postup opakujeme, dokud chyba aproximace není menší než požadovaná maximální chyba výpočtu.
Chyba aproximace je v každém kroku rovna nanejvýš polovině délky intervalu, tedy je menší než $\frac{b_k - a_k}{2}$.

Výpočet můžeme pro přehlednost zapisovat do tabulky (např.):

a_k	b_k	$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$	$\operatorname{sgn} P(a_k)$	$P(x_k)$	$\operatorname{sgn} P(b_k)$	$\frac{b_k - a_k}{2}$

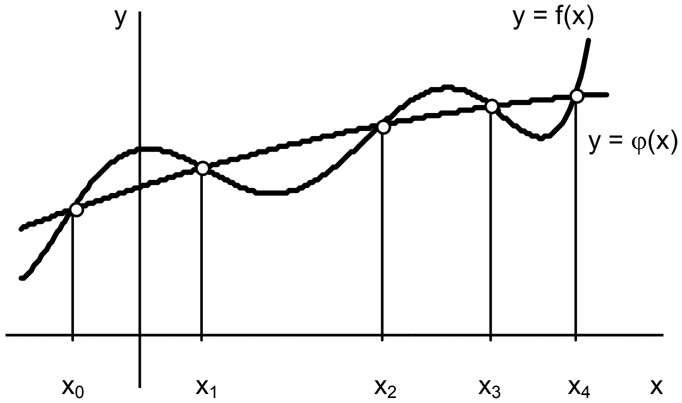
APROXIMACE FUNKCE

V praxi často nahrazujeme danou funkci $f(x)$ jinou, jednodušší funkcí $\varphi(x)$, nejčastěji se dané funkce nahrazují polynomy. Stručně se zmíníme o dvou metodách.

Interpolace

V definičním oboru aproximované funkce f zvolíme konečnou množinu bodů a požadujeme, aby hodnoty aproximační funkce φ byly v těchto bodech shodné s hodnotami funkce f.

Interpolaci užíváme zejména v případě, kdy funkční závislost f je dána pouze tabulkou, tj. když jsou dány pouze hodnoty $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, … v izolovaných bodech x_0, x_1, … Interpolační funkce $\varphi(x)$ pak vyjádří uvažovanou funkční závislost v algebraickém tvaru (vzorcem). To umožní funkční závislost lépe charakterizovat (kde roste, kde klesá, kde je konkávní, …) a případně určit funkční hodnoty v bodech ležících mezi body x_0, x_1, x_2, …



> **Věta.** Nechť v intervalu J je dáno $(n+1)$ různých bodů (tzv. uzlů)
> $$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n.$$
> Dále nechť jsou dány funkční hodnoty $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$ v těchto uzlech. Pak existuje právě jeden polynom $P(x)$ stupně nejvýše n takový, že
> $$P(x_k) = f(x_k)\ , \quad \text{pro všechna } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Lagrangeův tvar tohoto polynomu je

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot l_i(x) = f(x_0)\cdot l_0(x) + f(x_1)\cdot l_1(x) + \ldots + f(x_n)\cdot l_n(x) \ ,$$

kde $l_k(x)$ je tzv. Lagrangeův koeficient. Je to polynom n-tého stupně tvaru

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})\cdot(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdot(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})\cdot(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

Metoda nejmenších čtverců

Jsou-li hodnoty $f(x_k)$ výsledky měření, je jejich přesnost ovlivněna chybami měření a přestává mít smysl požadavek, aby funkce $\varphi(x)$ měla v uzlových bodech stejnou funkční hodnotu. Požadujeme pouze, aby funkce $\varphi(x)$ procházela „co nejblíže" těchto uzlů. Hodnoty funkce φ se od hodnot funkce f liší o $\Delta y_k = |\varphi_k - f_k|$.

Říkáme, že daný soubor hodnot $f(x_k)$ vyrovnáváme funkcí $\varphi(x)$.

Při metodě nejmenších čtverců se jako kriterium „co největšího přiblížení" křivky $\varphi(x)$ k bodům $f(x_k)$ požaduje, aby součet obsahů čtverců

$$S = (\Delta y_0)^2 + (\Delta y_1)^2 + \cdots + (\Delta y_n)^2 = \sum_{k=0}^{n} (\Delta y_k)^2 = \sum_{k=0}^{n} (\varphi(x_k) - f(x_k))^2$$

byl co nejmenší (viz obr.).

Při vyrovnání přímkou $\varphi(x) = ax + b$ vede požadavek minimálního součtu obsahů čtverců k rovnicím

$$a\sum_{k=0}^{n} x_k + b\sum_{k=0}^{n} 1 = \sum_{k=0}^{n} f_k$$
$$a\sum_{k=0}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} x_k f_k$$

pro neznámé a, b.