

EXTRÉMY FUNKCE 2 PROMĚNNÝCH

I. Určete lokální extrémy funkcí:

- $z = 1 + 6y - y^2 + xy - x^2$
 $z_{\max} = 13$ v bodě $[2, 4]$
- $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$
 $z_{\min} = 0$ v bodě $[0, 0]$
- $z = x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x + 8y - 5$
 $z_{\min} = -24$ v bodě $[7, -3]$
- $z = e^{x^2 - y}(5 - 2x + y)$
nemá lok. extr., stac. bod $[1, -2]$
- $z = 8x^3 + y^3 - 6xy + 4$
 $z_{\min} = 3$ v bodě $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
- $z = x^3 + xy^2 + 6xy$
 $z_{\min} = -6\sqrt{3}$ v bodě $[\sqrt{3}, -3]$,
 $z_{\max} = 6\sqrt{3}$ v bodě $[-\sqrt{3}, -3]$
- $z = 3 + e^y(x^2 + y)$
 $z_{\min} = 3 - \frac{1}{e}$ v bodě $[0, -1]$
- $z = xy + \frac{8}{x} + \frac{1}{y}$
 $z_{\min} = 6$ v bodě $\left[4, \frac{1}{2}\right]$
- $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 9y + 1$
 $z_{\max} = 28$ v bodě $[9, 6]$
- $z = e^{-(x^2 + y^2)}$
 $z_{\max} = 1$ v bodě $[0, 0]$
- $z = x - 3y^2 - \ln(x + 2y)$
nemá lok. extr., stac. bod $\left[\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right]$

II. Určete vázané extrémy funkcí:

- $z = 2(x^2 + y^2)$, je-li $x + y - 1 = 0$
 $z_{\min} = 1$ v bodě $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- $z = xy(4 - x - y)$, je-li $x + y = 8$
 $z_{\min} = -64$ v bodě $[4, 4]$
- $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ při podmínce $x + y = 2$
 $z_{\min} = 2$ v bodě $[1, 1]$
- $z = (2x^2 + y)e^y$, je-li $x + y - 1 = 0$
 $z_{\min} = \sqrt{e}$ v bodě $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$,
 $z_{\max} = 7e^{-1}$ v bodě $[2, -1]$
- $z = x^3 + 2x^2 + 9x - y + 3$ při podmínce $x^3 + x - y = 0$
 $z_{\min} = -5$ v bodě $[-2, -10]$

Pozn.: ve skriptech příklady 1-5 ve cvičení 2.39

III. Určete absolutní extrémy funkcí:

1. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 1$ v uzavřené trojúhelníkové oblasti, která je vymezena souřadnicovými osami a přímkou $x + y = 2$

$$\max z = 5 \text{ v } [0, 2] \text{ a } [2, 0], \min z = -1 \text{ v } [0, 0]$$

2. $z = x^3 + 2x^2 + y^2 - 2$ v uzavřené oblasti ohraničené $y = 4$ a $y = x^2$

$$\max z = 30 \text{ v } [2, 4], \text{ abs. min} = -2 \text{ v počátku}$$

3. $z = xy(4 - x - y)$ v uzavřeném trojúhelníku ohraničeném přímkami $x = 1$, $y = 0$ a $x + y = 6$

$$\max z = \frac{64}{27} \text{ v bodě } \left[\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right], \min z = -18 \text{ v } [3, 3]$$

4. $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ na uzavřené oblasti ohraničené přímkami $x = 0$, $y = x + 1$ a $y = -x - 1$. (Pozn. $oblast \subset D(f(x, y))$)

$$\max z = \sqrt{2} \text{ v } [0, 0], \text{ abs. min je } 1 \text{ ve vrcholech trojúhelníka}$$

Pozn.: ve skriptech příklady 1-6 ve cvičení 2.41

IV. Určete lokální extrémy funkce $z = x^4 - 4xy + y^4$ a její absolutní maximum na uzavřené množině ohraničené přímkami $x = -1$, $x = 1$, $y = 1$ a $y = 3$.

$$\text{lokální minimum } [1, 1, -2]$$

$$\text{absolutní maximum } [-1, 3, 94]$$