ČÍSELNÉ VEKTORY

Definice. Uspořádanou n-tici čísel $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ nazveme **číselným vektorem**. Čísla $a_1, a_2, ..., a_n$ jsou **složky** neboli **souřadnice** vektoru $\vec{a}$. Přirozené číslo n nazýváme **rozměrem** nebo také **dimenzí** vektoru $\vec{a}$.

Definice. Vektor, jehož všechny složky se rovnají nule, se nazývá **nulový vektor** $\vec{o}$ = (0, 0, 0, …, 0).

Operace s vektory

Nechť jsou dány vektory $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ téže dimenze n a reálné číslo α.

1. Součtem vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ je vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$

2. Součinem vektoru $\vec{a}$ a čísla α je vektor $\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, ..., \alpha \cdot a_n)$

   Definice. Součinem čísla (–1) a vektoru $\vec{a}$ je vektor $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, ..., -a_n)$.
   Tento vektor nazveme vektorem opačným k $\vec{a}$.
   Poznámka: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$

3. Rozdílem vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ je vektor $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, ..., a_n - b_n)$.

   Definice. $\vec{a} = \vec{b}$ jestliže $a_i = b_i$, pro i = 1, 2, …., n.

4. Skalárním součinem vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ je číslo $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n$

Definice. Velikostí vektoru $\vec{a}$ nazveme nezáporné číslo $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$.
Vektor $\vec{a}$ nazveme jednotkovým vektorem, jestliže $|\vec{a}| = 1$.

Definice. Lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ stejného rozměru nazveme každý vektor $\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + ... + k_n\vec{u}_n$, kde $k_i \in R$ pro $i = 1, 2, ..., n$.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice. Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ stejné dimenze nazveme
- **lineárně závislé,** jestliže alespoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních
- **lineárně nezávislé**, jestliže žádný z nich není lineární kombinací ostatních.

Věta. Nenulové vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ jsou lineárně nezávislé, právě když $k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + ... + k_n\vec{u}_n = \vec{o}$ jen pro $k_1 = k_2 = k_3 = ... = k_n = 0$.
Platí-li $k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + ... + k_n\vec{u}_n = \vec{o}$, kde $k_1, k_2, ..., k_n$ jsou vhodná čísla, z nichž aspoň jedno je různé od nuly, jsou vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., u_n$ lineárně závislé.

Speciálně: Vektory jsou lineárně závislé, když je mezi nimi
a) alespoň jeden nulový,
b) dvojice sobě rovných,
c) jeden vektor k-násobkem jiného vektoru.

MATICE

Definice. Maticí typu (m,n), kde $m, n \in N$, nazveme množinu $m \cdot n$ prvků (reálných čísel), uspořádaných do m řádků a n sloupců.

Píšeme $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ nebo zkráceně $\left\| a_{ij} \right\|_{m,n}$ kde i = 1,…, m; j = 1,…, n.

Tedy a_{ij} je prvek matice A, který leží v i-tém řádku a j-tém sloupci matice.
Je-li m ≠ n, pak je matice **obdélníková**, je-li m = n, je to **čtvercová matice** řádu n.

Prvky matice $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{mm}$ $(m \le n)$ resp. $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ $(m > n)$ tvoří **hlavní diagonálu** matice A, analogicky se definuje **vedlejší diagonála** matice A tvořená prvky $a_{m,1}, a_{m-1,2}, a_{m-2,3}, ...$.

Druhy matic

Matice nulová O je matice typu (m,n), jejíž všechny prvky jsou rovny nule.
Dvě nulové matice se od sebe liší pouze svým typem.

Matice transponovaná A^T je matice, která vznikne z matice A záměnou řádků za sloupce při zachování pořadí. Tato operace se nazývá **transpozice**.

Matice jednotková je <u>čtvercová</u> matice, která má v hlavní diagonále všechny prvky rovny jedné, všechny ostatní prvky jsou nuly. Jednotkové matice značíme **I.**

Matice stupňová (schodovitá) je matice, jejíž každý další řádek začíná větším počtem nul než předcházející.

Matice diagonální je matice (čtvercová nebo obdélníková), jejíž prvky v hlavní diagonále nejsou všechny nulové, ale všechny prvky, které neleží v hlavní diagonále, jsou nuly.

Definice. Pro matice $A = \left\| a_{ij} \right\|_{m,n}$ a $B = \left\| b_{ij} \right\|_{m,n}$ téhož typu (m, n) platí A = B , právě když $a_{ij} = b_{ij}$ pro i=1,2,…,m; j=1,2,…,n.

Operace s maticemi

1. <u>Součet (rozdíl) matic</u> : Jsou-li A, B matice typu (m, n) , pak $A \pm B = C$ je matice typu (m, n) a platí $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ pro i=1,2,…,m; j=1,2,…,n .
2. <u>Násobení matice číslem</u> : Je-li A matice typu (m, n) , $\alpha \in R$, pak $\alpha \cdot A = B$ je matice typu (m, n) a platí $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ pro i=1,2,…,m; j=1,2,…,n .
3. <u>Součin matic</u>: Nechť A je matice typu (m,p), B je matice typu (p,n).

   Součinem matic $A \cdot B = C$ je matice typu (m,n), pro jejíž prvky platí

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots\ldots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} .$$

Prvek c_{ij} je tedy **skalárním součinem i-tého řádku** matice A s **j-tým sloupcem** matice B.

Součin matic AB je definován pouze v případě, že počet sloupců prvé matice A je roven počtu řádků druhé matice B. Pokud tato podmínka není splněna, součin matic není definován.

Pro součin matic tedy **neplatí obecně komutativní zákon**. $A \cdot B \neq B \cdot A$

Definice. Jestliže pro dvě matice A, B, platí $AB = BA$, nazýváme matice A, B navzájem zaměnitelnými.

Některé zvláštní typy čtvercových matic jsou zaměnitelné s každou čtvercovou maticí stejného typu: 1. $A \cdot I = I \cdot A = A$

2. $A \cdot O = O \cdot A = O$

Inverzní matice

Definice. Matici A^{-1} nazveme **inverzní maticí** k regulární čtvercové matici A , jestliže platí: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, kde **I** je jednotková matice.

Hodnost matice

Definice. Hodnost nenulové matice je přirozené číslo, které udává počet lineárně nezávislých řad matice.

Hodnost matice A značíme h(A).
Hodnost nulové matice je rovna nule.

Věta. Elementární úpravy matice, které nemění její hodnost, jsou:

- libovolná záměna pořadí rovnoběžných řad
- vynásobení všech prvků téže řady stejným číslem $k \in R,\ k \neq 0$
- přičtení k libovolné řadě lineární kombinace řad s ní rovnoběžných
- vynechání řady, jejíž všechny prvky jsou nuly
- vynechání řady, která je lineární kombinací některé nebo ostatních řad s ní rovnoběžných.
- transponování matice *A*.

Definice. Elementární úpravy matice z předchozí věty nazveme **ekvivalentními úpravami.**
Dvě matice, z nichž jednu dostaneme z druhé konečným počtem ekvivalentních úprav, nazveme **ekvivalentními maticemi**. Píšeme A~B.

Při zjišťování hodnosti matice je nejvhodnější upravit danou matici na matici stupňovou pomocí ekvivalentních úprav, přičemž se vynulují lineárně závislé řádky. Hodnost matice je pak rovna počtu nenulových řádků ve výsledné stupňové matici.

Pomocí výpočtu hodnosti matice můžeme rozhodnout o lineární závislosti či nezávislosti soustavy číselných vektorů. Mějme m n-rozměrných vektorů. Tyto vektory zapíšeme do řádků matice. Dostaneme matici A typu (m,n). Pak platí:

$h(A) = m \Rightarrow$ soustava vektorů je lineárně nezávislá
$h(A) < m \Rightarrow$ soustava vektorů je lineárně závislá.

DETERMINANTY

Definice. Determinantem čtvercové matice A řádu n je reálné číslo, které je jistým předpisem této matici přiřazeno.

Píšeme
$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Číslo n nazveme **řádem** determinantu, číslo a_{ij} prvkem determinantu, který leží v i-tém řádku a j-tém sloupci. Prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ tvoří **hlavní diagonálu.** Prvky $a_{n1}, a_{n-1,2,}, \dots, a_{1n}$ tvoří **vedlejší diagonálu.**

Vyčíslení determinantů 1., 2. a 3. řádu

Determinant 1. řádu $\det A = |a_{11}| = a_{11}$.

Determinant 2. řádu $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

tj. determinant 2. řádu se rovná součinu prvků hlavní diagonály minus součin prvků vedlejší diagonály. Tento postup se nazývá **křížové pravidlo**.

Determinant 3. řádu

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Algoritmu pro výpočet determinantu třetího řádu se říká **Sarrusovo pravidlo**.

Vlastnosti determinantů

Věta. Pro determinant A libovolného řádu platí:

1. $\det A = \det A^T$
2. Vyměníme-li v determinantu dvě sousední rovnoběžné řady, změní determinant své znaménko.
3. Determinant se rovná nule, když
   (a) všechny prvky některé řady jsou nuly
   (b) dvě rovnoběžné řady jsou stejné
   (c) některá řada je lineární kombinací (k-násobkem) řady s ní rovnoběžné.
4. Vynásobíme-li prvky libovolné řady det A číslem $\alpha \neq 0$, dostaneme det B, pro který platí $\det B = \alpha \det A$,
5. Přičteme-li k libovolné řadě determinantu násobek řady s ní rovnoběžné, hodnota determinantu se nezmění.
6. Determinant, který má pod hlavní diagonálou samé nuly, je roven součinu prvků v této diagonále.

Vyčíslení determinantů vyšších řádů

Definice. Vynecháme-li v determinantu n-tého řádu i-tý řádek a j-tý sloupec, vznikne determinant (n–1). řádu, který nazveme **subdeterminantem (minorem)** determinantu A přidruženým k prvku a_{ij}. Tento minor budeme značit symbolem M_{ij}.

Definice. Číslo $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$
nazveme **algebraickým doplňkem** prvku a_{ij} v determinantu A.

Věta. Determinant det A, n-tého řádu, se rovná součtu všech součinů prvků libovolné řady determinantu a jejich algebraických doplňků.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad \text{pro i-tý řádek nebo}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \quad \text{pro j-tý sloupec.}$$

Tento postup nazýváme **Laplaceovým rozvojem** determinantu podle prvků i-tého řádku nebo j-tého sloupce.

ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC

Definice. Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozumíme soustavu

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} ,$$

kde b_i, a_{ij}, jsou reálná čísla pro i = 1, 2,...,m; j = 1, 2,...,n.

Soustava se nazývá **homogenní,** když $b_i = 0$ pro všechna i = 1, 2, …, m.
Soustava se nazývá **nehomogenní,** když je $b_i \neq 0$ aspoň pro jedno i.

Matici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ nazveme **maticí soustavy**,

matici $A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ **maticí rozšířenou**,

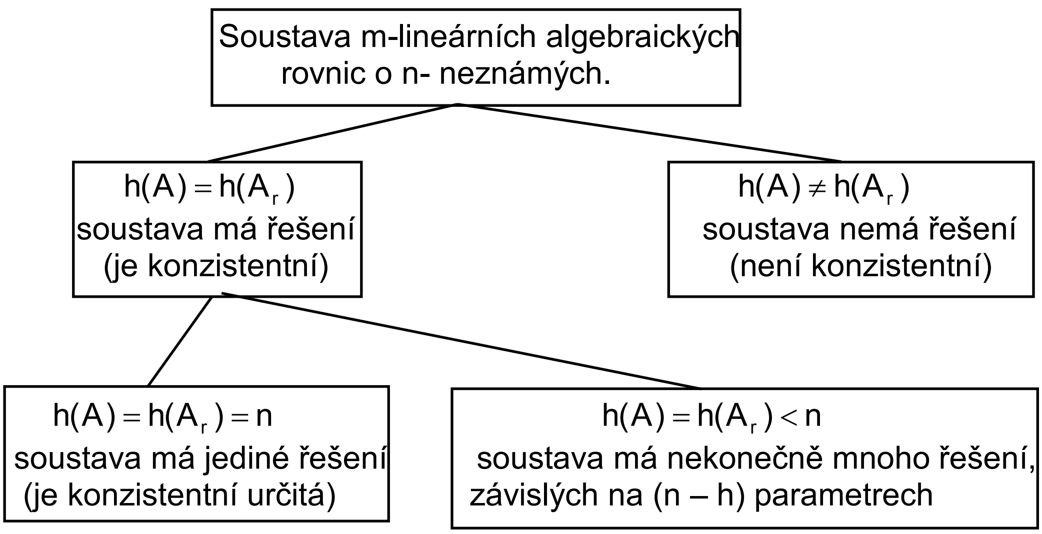
řádkový vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ **vektorem neznámých** a

sloupcový vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ **vektorem pravých stran rovnic**.

Soustavu rovnic pak můžeme zapsat maticově $\boxed{A \cdot \vec{x}^T = \vec{b}}$

Řešením soustavy rovnic je každý vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, který vyhovuje všem rovnicím soustavy.

Věta. Frobeniova věta. Soustava m-lineárních rovnic o n-neznámých má řešení právě tehdy, když matice soustavy a matice rozšířená mají stejnou hodnost.



Příklad. Je-li po úpravě $A_r = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{array}\right)$, potom má soustava právě jedno řešení, protože $h(A) = 2, h(A_r) = 2$ a počet neznámých je také 2.

Příklad. Je-li $A_r = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$, potom $h(A) = 2, h(A_r) = 2$, tedy soustava má řešení a protože neznámé jsou 3, bude mít nekonečně mnoho řešení závislých na 1 parametru.

Věta. Homogenní soustava lineárních rovnic má vždy řešení.

Protože rozšířená matice A_r homogenní soustavy má v posledním sloupci všechny prvky rovny nule, mají matice soustavy A a matice rozšířená A_r vždy stejnou hodnost $h(A) = h(A_r) = h$.

Má-li homogenní soustava jediné řešení, je to tzv. **triviální řešení** $\vec{x} = \vec{o}$. (Všechny neznámé jsou rovny nule.)

Neúplná (Gaussova) eliminační metoda

1) rozšířenou matici A_r soustavy rovnic převedeme pomocí ekvivalentních úprav řádků na matici stupňovou. Použijeme-li při těchto úpravách záměnu pořadí sloupců v matici soustavy, musíme počítat se stejnou záměnou pořadí neznámých. Sloupec pravých stran rovnic soustavy přitom vždy musí zůstat na svém místě,

2) pomocí Frobeniovy věty provedeme rozbor řešení,

3) stupňové matici přiřadíme zpětně soustavu rovnic, která je ekvivalentní s původní soustavou. To znamená: poslední řádek stupňové matice napíšeme jako rovnici a z ní vypočítáme jednu neznámou. Dále napíšeme rovnici z předposledního řádku stupňové matice, do ní dosadíme již vypočítanou neznámou a vyjádříme další neznámou. Tak pokračujeme dále, až z prvního řádku dostaneme poslední neznámou. Tímto postupem vypočítáme všechny neznámé. Výsledek zapisujeme jako vektor řešení.