

## Kružnice

- Kružnice se středem v počátku soustavy kartézských souřadnic ( $S = [0,0]$ ) a s poloměrem  $r$  má rovnici  $x^2 + y^2 = r^2$ .
- Kružnice se středem  $S = [m,n]$  a poloměrem  $r$  má rovnici  $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ .
- Rovnici každé kružnice lze vyjádřit ve tvaru  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ , kde  $A, B, C \in R$ . (Obrácené tvrzení neplatí. Ne každá rovnice uvedeného tvaru je rovnicí kružnice.)

**Poznámka:** Poslední uvedená rovnice se nazývá obecná rovnice kružnice nebo obecný tvar rovnice kružnice, předchozí 2 rovnice nazýváme středové rovnice kružnice nebo středový tvar rovnice kružnice.

**Příklad:** Kružnice se středem v bodě  $[0,0]$  a poloměrem  $r = 3$  má rovnici  $x^2 + y^2 = 9$ .

**Příklad:** Kružnice se středem v bodě  $[-2,3]$  a poloměrem  $r = 5$  má rovnici

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

**Příklad:** Určete střed a poloměr kružnice dané obecnou rovnicí  $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$ .

Řešení: Obecnou rovnici převedeme na středový tvar. Sepíšeme k sobě členy obsahující  $x$  a  $y$  a doplníme na čtverec. Konstanty převedeme na pravou stranu rovnice.

$$x^2 + 6x + y^2 - 8y + 21 = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = -21 + 9 + 16$$

$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$  jde tedy o kružnici se středem v bodě  $[-3,4]$  a poloměrem  $r = 2$ .

## Elipsa

- Elipsa, jejíž střed je totožný s počátkem soustavy kartézských souřadnic ( $S \equiv 0$ ) a jejíž hlavní osa je totožná s osou  $x$  má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{kde } a \text{ je hlavní, } b \text{ vedlejší poloosa elipsy.}$$

- Elipsa, jejíž střed je totožný s počátkem soustavy kartézských souřadnic ( $S \equiv 0$ ) a jejíž hlavní osa je totožná s osou  $y$  má rovnici

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad \text{kde } a \text{ je hlavní, } b \text{ vedlejší poloosa elipsy.}$$

**Poznámka:** Tyto rovnice nazýváme osové rovnice elipsy nebo středové rovnice elipsy.

- Elipsa, která má střed  $S = [m,n]$  a jejíž hlavní osa je rovnoběžná s osou  $x$  má rovnici

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1, \quad \text{kde } a \text{ je hlavní, } b \text{ vedlejší poloosa elipsy.}$$

- Elipsa, která má střed  $S = [m, n]$  a jejíž hlavní osa je rovnoběžná s osou  $y$  má rovnici

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1, \quad \text{kde } a \text{ je hlavní, } b \text{ vedlejší poloosa elipsy.}$$

Obecná rovnice elipsy je tvaru  $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ , kde  $A > 0, B > 0, A \neq B$ .

**Příklad:**  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{81} = 1$  je rovnice elipsy se středem  $S = [0, 0]$ ,  $a = 6, b = 9$ , tedy hlavní osa je totožná s osou  $y$ .

**Příklad:**  $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$  je rovnice elipsy se středem  $S = [2, -3]$ ,  $a = 5, b = 2$ , tedy hlavní osa je rovnoběžná s osou  $x$ .

**Příklad:** Zjistěte, zda je rovnice  $9x^2 + 16y^2 + 36x - 32y - 92 = 0$  rovnicí elipsy. Pokud ano, určete její střed a velikosti poloos.

Řešení: Obecnou rovnici převedeme na středový tvar. Sepíšeme k sobě členy obsahující  $x$  a  $y$ , potom z těchto členů vytkneme konstantu, která je u druhé mocniny, a doplníme na čtverec.

$$9x^2 + 36x + 16y^2 - 32y = 92$$

$$9(x^2 + 4x) + 16(y^2 - 2y) = 92$$

$$9[(x+2)^2 - 4] + 16[(y-1)^2 - 1] = 92$$

$$9(x+2)^2 + 16(y-1)^2 = 92 + 36 + 16$$

$$9(x+2)^2 + 16(y-1)^2 = 144$$

Na pravé straně rovnice musí být 1, proto vydělíme rovnici pravou stranou

$$9(x+2)^2 + 16(y-1)^2 = 144 \quad / :144$$

$$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

Zadaná rovnice je rovnicí elipsy se středem  $S = [-2, 1]$ , její poloosy  $a = 4, b = 3$ .

## Hyperbola

- Hyperbola, jejíž střed je totožný s počátkem soustavy kartézských souřadnic ( $S \equiv 0$ ) a jejíž hlavní osa je totožná s osou  $x$  má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{kde } a \text{ je hlavní, } b \text{ vedlejší poloosa hyperboly.}$$

- Hyperbola, jejíž střed je totožný s počátkem soustavy kartézských souřadnic ( $S \equiv 0$ ) a jejíž hlavní osa je totožná s osou  $y$  má rovnici

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad \text{kde } a \text{ je hlavní, } b \text{ vedlejší poloosa hyperboly.}$$

**Poznámka:** Tyto rovnice nazýváme osové (nebo středové) rovnice hyperboly.

- Hyperbola, která má střed  $S = [m, n]$  a jejíž hlavní osa je rovnoběžná s osou  $x$  má rovnici

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1, \quad \text{kde } a \text{ je hlavní, } b \text{ vedlejší poloosa hyperboly.}$$

- Hyperbola, která má střed  $S = [m, n]$  a jejíž hlavní osa je rovnoběžná s osou  $y$  má rovnici

$$-\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1, \quad \text{kde } a \text{ je hlavní, } b \text{ vedlejší poloosa hyperboly.}$$

Obecná rovnice hyperboly:  $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ , přičemž  $A \cdot B < 0$ .

**Příklad:**  $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$  je rovnice hyperboly se středem  $S = [0,0]$ ,  $a = 2\sqrt{3}$ ,  $b = 2$ , tedy hlavní osa je totožná s osou  $x$ .

**Příklad:** Zjistěte, zda je rovnice  $3x^2 - y^2 + 12x - 2y + 14 = 0$  rovnicí kuželosečky. Pokud ano, určete její střed a velikosti poloos.

Řešení: Z členů obsahujících proměnnou  $x$  vytkneme 3, z členů obsahujících  $y$  (-1), potom doplníme na čtverec.

$$\begin{aligned} 3x^2 - y^2 + 12x - 2y + 14 &= 0 \\ 3(x^2 + 4x) - (y^2 + 2y) &= -14 \\ 3[(x+2)^2 - 4] - [(y+1)^2 - 1] &= -14 \\ 3(x+2)^2 - (y+1)^2 &= -14 + 12 - 1 \\ 3(x+2)^2 - (y+1)^2 &= -3 \quad /: (-3) \\ -\frac{(x+2)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{3} &= 1 \end{aligned}$$

Je to rovnice hyperboly se středem  $S = [-2, -1]$ ,  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = 1$ , hlavní osa je rovnoběžná s osou  $y$ .

## Parabola

- Parabola, jejíž vrchol je totožný s počátkem soustavy kartézských souřadnic ( $V \equiv 0$ ) a jejíž osa je totožná s osou  $x$  má rovnici

$$y^2 = 2px, \text{ leží-li ohnisko } F \text{ na kladné poloose } x$$

$$y^2 = -2px, \text{ leží-li ohnisko } F \text{ na záporné poloose } x$$

Číslo  $2p > 0$  je parametr paraboly.

- Parabola, jejíž vrchol je totožný s počátkem soustavy kartézských souřadnic ( $V \equiv 0$ ) a jejíž osa je totožná s osou  $y$  má rovnici

$$x^2 = 2py, \text{ leží-li ohnisko } F \text{ na kladné poloose } y$$

$x^2 = -2py$ , leží-li ohnisko F na záporné poloose  $y$   
Číslo  $2p > 0$  je parametr paraboly.

**Poznámka:** Tyto rovnice nazýváme vrcholové rovnice paraboly.

- Parabola, která má vrchol  $V = [m, n]$  a jejíž osa je rovnoběžná s osou  $x$  má rovnici  
 $(y - n)^2 = 2p(x - m)$ , leží-li ohnisko F napravo od vrcholu V  
 $(y - n)^2 = -2p(x - m)$ , leží-li ohnisko F nalevo od vrcholu V  
Číslo  $2p > 0$  je parametr paraboly.
- Parabola, která má vrchol  $V = [m, n]$  a jejíž osa je rovnoběžná s osou  $y$  má rovnici  
 $(x - m)^2 = 2p(y - n)$ , leží-li ohnisko F nad vrcholem V  
 $(x - m)^2 = -2p(y - n)$ , leží-li ohnisko F pod vrcholem V  
Číslo  $2p > 0$  je parametr paraboly.

Obecná rovnice paraboly, jejíž osa je rovnoběžná s osou  $x$  :

$$y^2 + Ax + By + C = 0, \text{ kde } A \neq 0, A, B, C \in R$$

Obecná rovnice paraboly, jejíž osa je rovnoběžná s osou  $y$  :

$$x^2 + Ay + Bx + C = 0, \text{ kde } A \neq 0, A, B, C \in R$$

**Příklad:**  $y^2 = 10x \dots V = [0,0], 2p = 10, o \equiv x$ , ohnisko vpravo od V  
 $(y - 3)^2 = -2(x + 1) \dots V = [-1,3], 2p = 2, o \parallel x$ , ohnisko vlevo od V  
 $x^2 = 12y \dots V = [0,0], 2p = 12, o \equiv y$ , ohnisko nad V  
 $(x + 2)^2 = -(y + 3) \dots V = [-2,-3], 2p = 1, o \parallel y$ , ohnisko pod V

**Příklad:** Je daná obecná rovnice paraboly  $y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$ . Zjistěte souřadnice vrcholu a parametr.

**Řešení:** Převědeme členy obsahující  $x$  na pravou stranu rovnice. Levou stranu doplníme na čtverec a potom na pravé straně vytkneme konstantu u  $x$ .

$$y^2 + 6y = 4x - 13$$

$$(y + 3)^2 - 9 = 4x - 13$$

$$(y + 3)^2 = 4x - 4$$

$$(y + 3)^2 = 4(x - 1) \Rightarrow V = [1, -3], 2p = 4, o \parallel x, \text{ ohnisko vpravo od V.}$$

**Příklad:** Zjistěte souřadnice vrcholu a parametr paraboly  $x^2 + 8x + 5y + 26 = 0$ .

**Řešení:**  $x^2 + 8x = -5y - 26$

$$(x + 4)^2 - 16 = -5y - 26$$

$$(x + 4)^2 = -5y - 10$$

$$(x + 4)^2 = -5(y + 2) \Rightarrow V = [-4, -2], 2p = 5, o \parallel y, \text{ ohnisko pod V.}$$