INTEGRÁLNÍ POČET

Primitivní funkce. Neurčitý integrál

Definice. Jestliže pro funkce $F(x)$ a $f(x)$ definované na otevřeném intervalu J platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in J$, říkáme, že $F(x)$ je **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$ na J.

Věta. Je-li $f(x)$ spojitá na J, pak k ní existuje na J funkce primitivní.

Je-li $F(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na J a C libovolné číslo, pak

$$[\, F(x) + C\,]' = F'(x) = f(x),$$

tedy i každá funkce $F(x) + C$ je na J k funkci $f(x)$ primitivní.

Definice. Množinu všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na $\boldsymbol{J}$ nazýváme **neurčitý**m **integrál**em funkce $f(x)$. Píšeme $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

Poznámka: $\int \quad dx$ … integrační znak, $f(x)$…. integrand, C….. integrační konstanta.

Nalezení primitivní funkce nazýváme **integrování**. Je to opak derivování. Neznáme ale obecně platné vzorce pro integraci součinu a podílu a pro integraci složené funkce. Pro výpočet používáme především vlastnosti neurčitého integrálu (= pravidla).

Pravidla a vzorce pro integrování

P 1 $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

P 2 $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$, kde $k \neq 0$ je konstanta

----

V 1 $\int 1dx = x + C$

V 2 $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

V 3 $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

V 4 $\int \sin x dx = -\cos x + C$

V 5 $\int \cos x dx = \sin x + C$

V 6 $\int e^x dx = e^x + C$

V 7 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

V 8 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

V 9 $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$, když $\int f(x)dx = F(x) + C$

V10 $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{cotg} x + C$

V11 $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C$

V12 $\int \frac{1}{A^2 + x^2} dx = \frac{1}{A} \mathrm{arctg} \frac{x}{A} + C$

V13 $\int \frac{1}{A^2 - x^2} dx = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{A+x}{A-x} \right| + C$

V14 $\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{A} + C$

V15 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm B} \right| + C$

Metody výpočtu neurčitého integrálu

V některých případech (např. $\int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \ldots$) je nalezení primitivní funkce nám dostupnými metodami nemožné. Ukážeme jen základní integrační metody a způsoby integrace.

1. Přímá integrace pomocí vzorců a úprav integrandu.

Jednodušší funkce integrujeme přímo pomocí vzorců. Některé funkce je třeba nejdříve vhodně upravit.

1. $\int (2x^2 + 3x - 4) dx = \text{podle P1} = \int 2x^2 dx + \int 3x dx - \int 4 dx = \text{podle P2}$

$$= 2\int x^2 dx + 3\int x dx - 4\int 1 dx = \text{V2,V2,V1} = 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 4x + C$$

2. $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{4} \right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{-2} + \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \text{podle P1 a P2}$

$$= \int x^{\frac{1}{3}} dx - \int x^{-2} dx + \frac{1}{4} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \text{ podle V2} = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \text{po úpravě}$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{x} + \frac{1}{6}\sqrt{x^3} + C$$

3. $\int \frac{x+5}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{x}{x^2}+\frac{5}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)\mathrm{d}x =$ podle P1 a P2 $= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + 5\int x^{-2}\,\mathrm{d}x =$

podle V3 a V2 $= \ln|x| + 5\,\frac{x^{-1}}{-1} = \ln|x| - \frac{5}{x} + C$

Užití vzorce V8:

4. $\int \frac{6x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{2x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x = 3\cdot\ln\left|x^2-5\right| + C$

5. $\int \frac{x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\ln\left|x^3+1\right| + C$

6. $\int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$

Užití vzorce V9:

7. $\int (5x-4)^8\,\mathrm{d}x =$ podle V9 a V2 $= \frac{1}{5}\frac{(5x-4)^9}{9} = \frac{1}{45}(5x-4)^9 + C$

8. $\int \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x =$ podle V9 a V6 $= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + C$

9. $\int \sqrt{7x+3}\,\mathrm{d}x = \int (7x+3)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\frac{(7x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{21}\sqrt{(7x+3)^3} + C$

Užití vzorců V12, V13:

10. $\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = -\int \frac{1}{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C$

11. $\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x =$ doplnění kvadratického trojčlenu na čtverec

$= \int \frac{1}{(x+1)^2-1+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,\mathrm{d}x =$ podle V12 $= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$

Analogicky postupujeme, je-li ve jmenovateli odmocnina z kvadratického trojčlenu.

Užití vzorců V14, V15:

12. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2-4+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2-3}}\,\mathrm{d}x =$ podle V15

$$= \ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+1}\right| + C$$

2. Metoda „per partes“

Tato metoda integrace „po částech“ umožňuje integrovat některé součiny funkcí pomocí vzorce

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$$

kde funkce $u = u(x)$ a $v = v(x)$ mají spojité derivace u' a v' (na intervalu J).

Používá se k řešení neurčitých integrálů zejména těchto typů (P(x) je polynom):

1. $\int P(x)\cdot(\text{logaritmická funkce})\,dx$

   $\int P(x)\cdot(\text{cyklometrická funkce})\,dx$

   volíme $u' = P(x)$, takže $u = \int P(x)\,dx$,

2. $\int P(x)\cdot(\text{goniometrická funkce})\,dx$

   $\int P(x)\cdot(\text{exponenciální funkce})\,dx$

   volíme $v = P(x)$, takže $v' = P'(x)$.

Příklad . $\int x\ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x}\end{matrix}\right| = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx =$

$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C$

Metodu můžeme použít opakovaně.

Příklad . $\int x^2\cos x\,dx = \ldots = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

V některých případech může být polynom $P(x)$ stupně 0, tj. $P(x) = 1$.

Příklad . $\int \operatorname{arctg} x\,dx = \ldots = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

3. Metoda substituční

Umožňuje integrovat některé složené funkce. Uvedeme dva základní typy.

1. Substituce typu $\varphi(x) = t$ probíhá podle schématu:

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \left|\begin{matrix}\varphi(x) = t \\ \textit{diferencujeme} \\ \varphi'(x)\,dx = 1dt\end{matrix}\right| = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C,$$

za předpokladu, že $f(t)$ je spojitá a že $\varphi(x)$ má nenulovou derivaci.

Za novou proměnnou často volíme vnitřní složku složené funkce.

Příklad . $\int x\,\mathrm{e}^{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x^2+3=t \\ 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \mathrm{e}^t \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+3}+C$

2. Substituce typu $x=g(t)$ probíhá podle schématu:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x=g(t) \\ diferencujeme \\ 1dx=g^{\prime}(t)\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f(g(t))g^{\prime}(t)\mathrm{d}t = F(t)+C = F(\psi(x))+C, \text{ kde } \psi(x)=t$$

za předpokladu, že $f(x)$ je spojitá a že $g(t)$ má nenulovou derivaci.

Příklad . $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sqrt{1+x}=t \\ 1+x=t^2 \\ x=t^2-1 \\ \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{(2+t^2-1)t}2t\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t =$

$= 2\mathrm{arctg}\,t = 2\mathrm{arctg}\sqrt{1+x}+C$

Integrace racionálních lomených funkcí

Nemůžeme-li integrovat přímo, je třeba funkci rozložit a teprve potom integrovat. Neryze lomenou RLF dělením rozložíme na součet polynomu a funkce ryze lomené. (Ryze lomené funkce se někdy dál rozkládají na tzv. parciální zlomky.)

Příklad . $\int \frac{x^2}{x^2+3}\mathrm{d}x = \text{dělení} = \int \left(1-\frac{3}{x^2+3}\right)\mathrm{d}x =$ V1 a V12 $= x-3\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$

Poznámka: Ryze lomené racionální funkce budeme integrovat pomocí některého ze vzorců V3,8,12,13, případně V9 nebo substitucí.

Integrace goniometrických funkcí

$\int R(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x$ … zavádíme substituci $\cos x = t$

$\int R(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x$ … zavádíme substituci $\sin x = t$

Většinou je třeba integrand na tento typ převést užitím goniometrických vztahů, vzorců (např. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$) nebo rozšířením zlomku $\sin x$ nebo $\cos x$.

Běžně se používá úprava, kdy lichou mocninu v čitateli rozdělíme na součin první mocniny a mocniny sudé.

Příklad . $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x\cdot\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{(1-\cos^2 x)}{1+\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \cos x=t \\ -\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array} \right|$

$$= \int \frac{1-t^2}{1+t}(-\mathrm{d}t) = -\int \frac{(1-t)(1+t)}{1+t}\mathrm{d}t = \int (t-1)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - t = \frac{1}{2}\cos^2 x - \cos x + C$$

Poznámka:

1) Univerzální metoda k výpočtu $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ … substituce $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$.
2) Pokud $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ obsahuje jen sudé mocniny funkcí sinus a kosinus … $\mathrm{tg}x = t$, také u $\int R(\mathrm{tg}x)\mathrm{d}x$.

Integrace iracionálních funkcí

a) některé typy už byly zmíněny v předchozím: úpravou integrandu, např. $\int \sqrt[3]{x^5}\,\mathrm{d}x$, užitím vzorce, např. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x+9}}$, jednoduchou substitucí, např. $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$, …

b) $\int R(x; \sqrt[n]{f(x)})\mathrm{d}x$, kde $f(x) = ax+b$ nebo $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ … zavedeme $t = \sqrt[n]{f(x)}$

Příklad . $$\int \frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x-2} = t \\ x-2 = t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{t}{1+t}2t\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t = \text{dělení}$$

$$= 2\int \left(t - 1 + \frac{1}{1+t} \right)\mathrm{d}t = 2\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t| \right) = (x-2) - 2\sqrt{x-2} + 2\ln\left|1+\sqrt{x-2}\right| + C$$

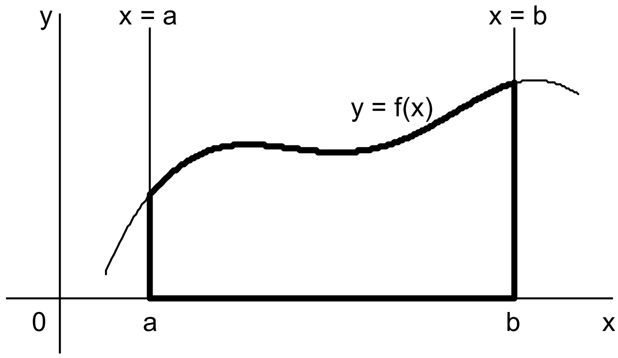
c) $\int R(x; \sqrt[n]{f(x)}; \sqrt[p]{f(x)}; ...)\mathrm{d}x$, kde $f(x) = ax+b$ nebo $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ … zavedeme $t = \sqrt[s]{f(x)}$, kde s je společný odmocnitel

Příklad . $$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = t^4 \\ \mathrm{d}x = 4t^3\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{t^4}+\sqrt[4]{t^4}}4t^3\mathrm{d}t = 4\int \frac{t^3}{t^2+t}\mathrm{d}t = 4\int \frac{t^2}{t+1}\mathrm{d}t =$$

$$\text{dělení} = 4\int \left(t - 1 + \frac{1}{1+t} \right)\mathrm{d}t = 4\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t| \right) = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + C$$

Určitý integrál

Z geometrického hlediska představuje $\int_a^b f(x)dx$ obsah plochy, která je ohraničená grafem nezáporné funkce $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$.



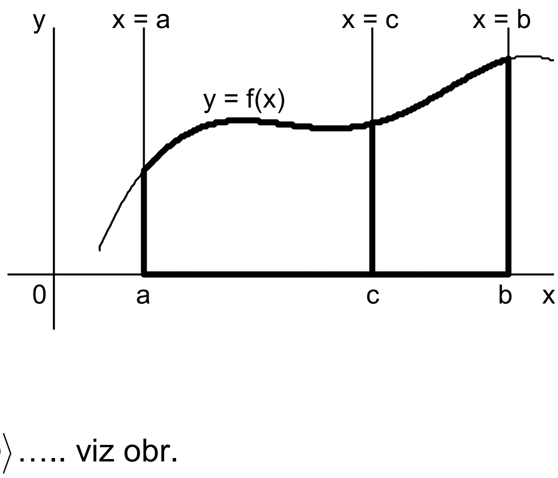
Definice. Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$. Newtonův **určitý integrál** od a do b z funkce $f(x)$ je číslo F(b) – F(a), kde $F(x)$ je funkce primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a,b \rangle$. Píšeme

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Číslo a nazýváme dolní integrační mez, číslo b horní integrační mez.

Poznámka. Vzorec $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ bývá v literatuře označován jako Newton-Leibnizův.

Vlastnosti určitého integrálu:



- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \cdots \quad c \in \langle a,b \rangle$ ….. viz obr.

1.Výpočet přímou integrací

Příklad . $\int_1^2 (9x^2 - 2x + 3)\mathrm{d}x = \left[9\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 3x\right]_1^2 = \left[3x^3 - x^2 + 3x\right]_1^2 =$

$= 3.8 - 4 + 6 - (3 - 1 + 3) = 21$

2. Metoda „per partes“ pro určitý integrál

$$\int_a^b u' v dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv' dx$$

Příklad . $\int_1^2 x \ln x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = x & u = \dfrac{x^2}{2} \\ v = \ln x & v' = \dfrac{1}{x} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x =$

$= \frac{4}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$

3. Metoda substituční pro určitý integrál

Použijeme-li substituční metodu k výpočtu určitého integrálu musíme stejnou substitucí transformovat meze:

Potom $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt \quad \cdots \quad \alpha = \varphi(a), \beta = \varphi(b)$

respektive $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt \quad \cdots \quad a = g(\alpha), b = g(\beta)$

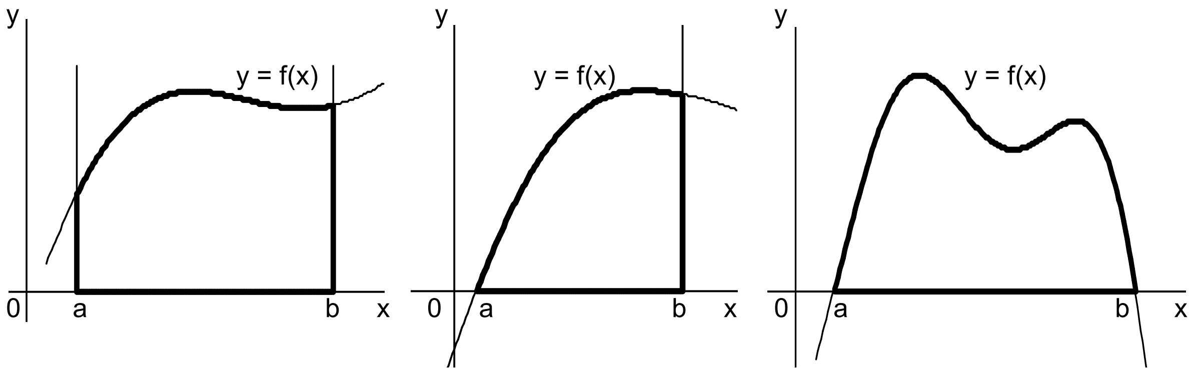
Příklad . $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x = 0 \Rightarrow t = \sin 0 = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

Můžeme také postupovat tak, že nejdříve najdeme primitivní funkci $F(x)$ k funkci $f(x)$, a potom použijeme Newton-Leibnizův vzorec.

Geometrické aplikace určitého integrálu

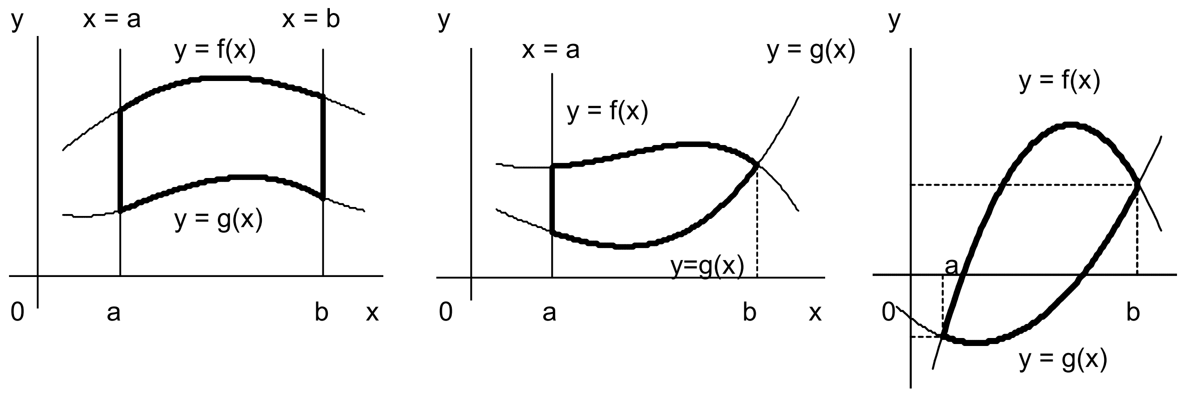
1. OBSAH ROVINNÉ PLOCHY

a) Obsah plochy ohraničené křivkou *y* = *f*(*x*) a osou *x* je podle definice určitého integrálu $S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



b) Obsah plochy ohraničené dvěma křivkami *y* = *f*(*x*) a *y* = *g*(*x*)

je $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$



Zde nezáleží na tom, zda část plochy leží nebo neleží pod osou *x*. Integrační meze *a*, *b* (pokud nejsou dány) jsou rovny x-ovým souřadnicím průsečíků daných křivek.

2. OBJEM ROTAČNÍHO TĚLESA

a) Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinné plochy ohraničené křivkou *y* = *f*(*x*) a osou *x* kolem osy *x* je $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x$

b) Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinné plochy ohraničené dvěma křivkami *y* = *f*(*x*) a *y* = *g*(*x*) kolem osy *x* je

$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) \mathrm{d}x$$