Metodou variace konstant vypočtěte obecné řešení nehomogenní lineární rovnice 2. řádu:

1. Příklad $y'' + 3y' - 4y = \mathrm{e}^{-x}$

Řešení:

1) Nejdříve vypočítáme obecné řešení homogenní rovnice $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Charakteristická rovnice je $z^2 + 3z - 4 = 0$. Odtud vypočítáme vlastní čísla.

$$z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} z_1 = -4 \\ z_2 = 1 \end{array}.$$

Protože vlastní čísla jsou reálná různá, fundamentální systém řešení tvoří funkce $y_1 = \mathrm{e}^{z_1 x}$ a $y_2 = \mathrm{e}^{z_2 x}$, v tomto případě $y_1 = \mathrm{e}^{-4x}$ a $y_2 = \mathrm{e}^{x}$.
Obecné řešení přidružené homogenní rovnice je tedy $y = c_1 \mathrm{e}^{-4x} + c_2 \mathrm{e}^{x}$.

2) Předpokládáme, že obecné řešení nehomogenní rovnice bude tvaru

$$y = c_1(x)\mathrm{e}^{-4x} + c_2(x)\mathrm{e}^{x}.$$

Připomeňme, že soustavu pro neurčité koeficienty $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ tvoří obecně rovnice

$$\begin{array}{l} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \end{array}, \text{ tedy budeme řešit } \begin{array}{l} c_1'(x)\mathrm{e}^{-4x} + c_2'(x)\mathrm{e}^{x} = 0 \\ c_1'(x)(-4)\mathrm{e}^{-4x} + c_2'(x)\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

Řešením budou funkce $c_1'(x)$, $c_2'(x)$, z nich potom integrací získáme $c_1(x)$, $c_2(x)$.

Na řešení soustavy můžeme použít např. dosazovací metodu, ale výpočet bude přehlednější, když použijeme Cramerovy vzorce.

Determinant matice soustavy (Wronskián):

$$W = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-4x} & \mathrm{e}^{x} \\ -4\mathrm{e}^{-4x} & \mathrm{e}^{x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-4x} \cdot \mathrm{e}^{x} - (-4\mathrm{e}^{-4x}) \cdot \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{-3x} + 4\mathrm{e}^{-3x} = 5\mathrm{e}^{-3x}$$

Další potřebné determinanty dostaneme z původního vždy nahrazením příslušného sloupce sloupcem pravých stran soustavy.

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{e}^{x} \\ \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{x} \end{vmatrix} = 0 - \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{e}^{x} = -1$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-4x} & 0 \\ -4\mathrm{e}^{-4x} & \mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-4x} \cdot \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-5x}$$

Z Cramerových vzorců $c_1'(x) = \dfrac{W_1}{W}$, $c_2'(x) = \dfrac{W_2}{W}$. Proto

$$c_1(x) = \int \frac{W_1}{W} = \int \frac{-1}{5\mathrm{e}^{-3x}} \mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\int \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} = -\frac{1}{15}\mathrm{e}^{3x} + C_1.$$

$$c_2(x)=\int\frac{W_2}{W}=\int\frac{e^{-5x}}{5e^{-3x}}dx=\frac{1}{5}\int e^{-2x}\,dx=\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}=-\frac{1}{10}e^{-2x}+C_2\,.$$

Získané funkce dosadíme do předpokládaného tvaru řešení. Dostaneme obecné řešení zadané rovnice:

$$y=\left(-\frac{1}{15}e^{3x}+C_1\right)e^{-4x}+\left(-\frac{1}{10}e^{-2x}+C_2\right)e^{x}.$$

Z teorie víte, že obecné řešení nehomogenní lineární rovnice má být součtem obecného řešení homogenní rovnice a jednoho partikulárního řešení. Přesvědčíme se o tom úpravou obecného řešení

$$y=-\frac{1}{15}e^{-x}+C_1e^{-4x}-\frac{1}{10}e^{-x}+C_2e^{x}$$

Tedy obecné řešení $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{x}-\frac{1}{6}e^{-x}$.

2. Příklad $y''+4y=\dfrac{1}{\sin 2x}$

Řešení:

1) Vypočítáme obecné řešení homogenní rovnice $y''+4y=0$.

Napíšeme a vyřešíme charakteristickou rovnici

$$z^2+4=0$$
$$z^2=-4$$
$$z_{1,2}=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i$$

Protože vlastní čísla jsou komplexně sdružená, fundamentální systém řešení tvoří funkce $y_1=e^{ax}\cos bx$ a $y_2=e^{ax}\sin bx$, v tomto případě
$y_1=e^{0x}\cos 2x=\cos 2x$, $y_2=e^{0x}\sin 2x=\sin 2x$.

Obecné řešení přidružené homogenní rovnice $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$.

2) Předpokládáme, že obecné řešení nehomogenní rovnice bude tvaru

$$y=c_1(x)\cos 2x+c_2(x)\sin 2x.$$

Nejdříve vyřešíme soustavu rovnic pro $c_1'(x)$, $c_2'(x)$:

$$c_1'(x)\cos 2x+c_2'(x)\sin 2x=0$$
$$c_1'(x)(-\sin 2x)\cdot 2+c_2'(x)\cos 2x\cdot 2=\frac{1}{\sin 2x}$$

$$W=\begin{vmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ -2\sin 2x & 2\cos 2x\end{vmatrix}=2\cos^2 2x+2\sin^2 2x=2(\cos^2 2x+\sin^2 2x)=2$$

Další determinanty dostaneme z původního nahrazením příslušného sloupce sloupcem pravých stran soustavy.

$$W_1=\begin{vmatrix}0 & \sin 2x\\ \dfrac{1}{\sin 2x} & 2\cos 2x\end{vmatrix}=0-\frac{\sin 2x}{\sin 2x}=-1$$

$$W_2=\begin{vmatrix}\cos 2x & 0\\ -2\sin 2x & \dfrac{1}{\sin 2x}\end{vmatrix}=\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

Potom

$$c_1(x)=\int\frac{W_1}{W}=\int\frac{-1}{2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}x+C_1.$$

$$c_2(x)=\int\frac{W_2}{W}=\int\frac{\frac{\cos 2x}{\sin 2x}}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\mathrm{d}x=$$ ..aby v čitateli byla derivace jmenovatele, musíme rozšířit 2.. $$=\frac{1}{4}\int\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\ln\left|\sin 2x\right|+C_2.$$

Výsledky dosadíme do předpokládaného tvaru řešení:

$$y=\left(-\frac{1}{2}x+C_1\right)\cos 2x+\left(\frac{1}{4}\ln\left|\sin 2x\right|+C_2\right)\sin 2x\ .$$

Pozn.: Pokud jste dočetli až sem a máte pocit, že by vám pomohlo víc řešených příkladů, napište mi mail a já připíšu další. Jestli to jako nápověda stačilo, pusťte se do počítání. Hodně zdaru při studiu.