MENDELU Agronomická fakulta

Mendelova univerzita v Brně

MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

MATM – MATEMATIKA

VEKTORY, MATICE A HODNOST MATICE - ŘEŠENÍ ÚLOH

Mgr. Radka SMÝKALOVÁ, Ph.D.

radka.smykalova@mendelu.cz

Úlohy 1. Jsou dány vektory $\vec{u} = (1, 3, -2, 5)$, $\vec{v} = (-2, 0, 1, 2)$. Vypočítejte

1. $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

Řešení. $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v} = 2(1, 3, -2, 5) - 3(-2, 0, 1, 2) = (2, 6, -4, 10) - (-6, 0, 3, 6) = \underline{\underline{(8, 6, -7, 4)}}$

2. velikost vektoru $\vec{w}$

Řešení. $|\vec{w}| = \sqrt{64 + 36 + 49 + 16} = \underline{\underline{\sqrt{165}}}$

3. skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Řešení. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = -2 + 0 - 2 + 10 = \underline{\underline{6}}$

4. úhel vektorů $\vec{u}, \vec{v}$

Řešení. $\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{6}{\sqrt{1+9+4+25} \cdot \sqrt{4+0+1+4}} = \frac{6}{\sqrt{39} \cdot \sqrt{9}} = \frac{6}{\sqrt{39} \cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{39}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos \frac{2}{\sqrt{39}} = \underline{\underline{71°19'}}$

5. jsou vektory $\vec{u}$ a $\vec{w}$ na sebe kolmé?

Řešení. $\vec{u} \cdot \vec{w} = (1, 3, -2, 5) \cdot (8, 6, -7, 4) = 1 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + (-2) \cdot (-7) + 5 \cdot 4 = 8 + 18 + 14 + 20 = \underline{\underline{60}}$

Úlohy 2. K matici A napište matici transponovanou. Určete typ matice A. Určete typ matice A^T.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Řešení. $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}$. Matice A je typu $(3, 4)$. Matice A^T je typu $(4, 3)$.

Úlohy 3. Napište jakoukoli nulovou matici, diagonální matici, jednotkovou matici, schodovitou matici.

Řešení. Nulová matice: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, diagonální matice: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, jednotková matice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

schodovité matice: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 & 8 \\ 0 & 0 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Úlohy 4. Jsou dány matice $A=\begin{pmatrix}1&-1&5\\2&4&-1\\2&3&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\0&3&0\\-2&4&2\end{pmatrix}$.

Vypočítejte $C=2A+B^T+3I$, $D=2(A-B)+A^T-I$.

Řešení.

$$C=2A+B^T+3I=2\begin{pmatrix}1&-1&5\\2&4&-1\\2&3&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&-2\\-1&3&4\\-2&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&10\\4&8&-2\\4&6&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&-2\\-1&3&4\\-2&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}7&-2&8\\3&14&2\\2&6&1\end{pmatrix}}}$$

$$D=2(A-B)+A^T-I=2\left(\begin{pmatrix}1&-1&5\\2&4&-1\\2&3&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1&-2\\0&3&0\\-2&4&2\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&4&3\\5&-1&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=2\begin{pmatrix}-1&0&7\\2&1&-1\\4&-1&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&4&3\\5&-1&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&14\\4&2&-2\\8&-2&-8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&4&3\\5&-1&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}-2&2&16\\3&5&1\\13&-3&-11\end{pmatrix}}}$$

Úlohy 5. Jsou dány matice $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3\\-1&0\\2&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&-1&3\\2&-2&0\end{pmatrix}$.

Vypočítejte $A\cdot B, B\cdot A, B\cdot C, C\cdot B, A\cdot C, C\cdot A, A^2, B^2, C^2$.

Řešení.

$$\overset{(2,\underline{3})}{A}\cdot\overset{(\underline{3},2)}{B}=\begin{pmatrix}-3&2\\5&5\end{pmatrix}$$

$$\overset{(3,\underline{2})}{B}\cdot\overset{(\underline{2},3)}{A}=\begin{pmatrix}4&2&5\\-1&-2&1\\3&4&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{(3,\underline{2})}{B}\cdot\overset{(\underline{3},3)}{C}=\text{ není definováno}$$

$$\overset{(3,\underline{3})}{C}\cdot\overset{(\underline{3},2)}{B}=\begin{pmatrix}0&1\\8&6\\4&6\end{pmatrix}$$

$$\overset{(2,\underline{3})}{A}\cdot\overset{(\underline{3},3)}{C}=\begin{pmatrix}0&2&7\\4&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{(3,\underline{3})}{C}\cdot\overset{(\underline{2},3)}{A}=\text{ není definováno}$$

$$A^2 = A \cdot A = \overset{(2,\underline{3})}{A} \cdot \overset{(\underline{2},3)}{A} = \text{ není definováno}$$

$$B^2 = B \cdot B = \overset{(3,\underline{2})}{B} \cdot \overset{(\underline{3},2)}{B} = \text{ není definováno}$$

$$C^2 = C \cdot C = \overset{(3,\underline{3})}{C} \cdot \overset{(\underline{3},3)}{C} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 5 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

<u>*Úlohy 6*</u>. Vypočítejte hodnost matice.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Řešení. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -8 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 8 & -8 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{3. řádek} \cdot(-1) \text{ a prohození 2. a 3. řádku}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -8 \\ 0 & -4 & 3 & 8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -8 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{h(A) = 3}}$

2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$

Řešení. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{prohození 1. a 4. řádku}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -52 & -130 & -13 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{2. řádek} \div(-5) \text{ a 3. řádek} \div(-13)} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{h(B) = 2}}$

<u>*Úlohy 7*</u>. Určete lineární závislost či nezávislost vektorů:

1. $u_1 = (6,3,2,3), u_2 = (4,2,1,2), u_3 = (4,2,3,2), u_4 = (2,1,7,3)$

Řešení. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & -19 & -6 \\ 0 & 0 & -13 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & -4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{4. řádek} \cdot(-1) \text{ a prohození 2. a 4. řádku}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & -13 & -4 \\ 0 & 0 & -19 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{3. řádek} \div 8 \text{ a 4. řádek} \div 10} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ vektory jsou lineárně závislé

2. $u_1 = (3,4,-1,2,-9), u_2 = (1,-2,3,-4,19), u_3 = (1,-1,1,-3,7), u_4 = (-2,3,2,1,-2)$

Řešení. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 19 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & -9 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 19 \\ 0 & 10 & -10 & 14 & -66 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -12 \\ 0 & -1 & 8 & -7 & 36 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{prohození 2. a 3. řádku}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 19 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -12 \\ 0 & 10 & -10 & 14 & -66 \\ 0 & -1 & 8 & -7 & 36 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 19 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 10 & 4 & 54 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 24 \end{pmatrix} \sim$

$\underset{\sim}{\text{3. řádek} \div 2 \text{ a 4. řádek} \div 6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 19 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{prohození 3. a 4. řádku}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 19 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 19 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$ vektory jsou lineárně nezávislé