MENDELU Agronomická fakulta

Mendelova univerzita v Brně

MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

MATM – MATEMATIKA

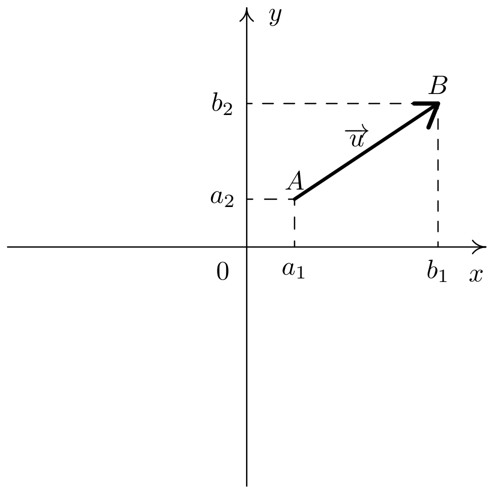
VEKTORY, MATICE A HODNOST MATICE

Mgr. Radka SMÝKALOVÁ, Ph.D.

radka.smykalova@mendelu.cz

Vektory a operace s nimi

<u>V rovině:</u>



Bod A má souřadnice $[a_1, a_2]$, bod B má souřadnice $[b_1, b_2]$.
Vektor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ (šipka od A do B) vypočítáme

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = [b_1, b_2] - [a_1, a_2] = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

Souřadnice vektoru značíme v kulatých závorkách.
Vektor je veličina, která má svoji **velikost** a **směr**.

V prostoru:

Bod A má souřadnice $[a_1, a_2, a_3]$, bod B má souřadnice $[b_1, b_2, b_3]$.
Vektor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ (šipka od A do B) vypočítáme

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = [b_1, b_2, b_3] - [a_1, a_2, a_3] = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Souřadnice vektoru značíme v kulatých závorkách.
Vektor je veličina, která má svoji **velikost** a **směr**.

Vektory, které mají stejnou velikost a směr, jen se liší **posunutím**, jsou shodné!!!

V n-rozměrném prostoru:

DEFINICE (Vektor). Uspořádanou n-tici čísel

$$\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

nazýváme číselným vektorem. Čísla $u_1, \dots, u_n$ jsou souřadnice vektoru $\overrightarrow{u}$. Číslo n nazýváme rozměrem vektoru $\overrightarrow{u}$.

DEFINICE (Operace s vektory). $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ jsou vektory, $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Pak platí

- $\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v} = (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2, \dots, u_n \pm v_n)$
- $c \cdot \overrightarrow{u} = (c \cdot u_1, c \cdot u_2, \dots, c \cdot u_n)$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n$ **skalární součin**
- $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$ **velikost vektoru**
- $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$ **odchylka vektorů, úhel sevřený dvěma vektory**

<u>DEFINICE (Nulový vektor)</u>. Vektor, jehož souřadnice jsou samé nuly

$$\overrightarrow{u} = (0, 0, \ldots, 0),$$

se nazývá nulový vektor.

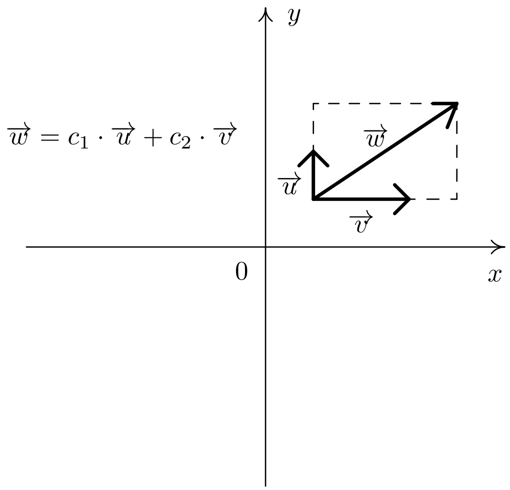
<u>Věta (Kolmost vektorů)</u>.
Dva vektory jsou na sebe kolmé, když je jejich skalární součin roven nule.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

<u>*Úlohy 1*</u>.
Jsou dány vektory $\overrightarrow{u} = (1, 3, -2, 5)$, $\overrightarrow{v} = (-2, 0, 1, 2)$. Vypočítejte
1. $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$ **2.** velikost vektoru $\overrightarrow{w}$ **3.** skalární součin $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$
4. úhel vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ **5.** jsou vektory $\overrightarrow{u}$ a $\overrightarrow{w}$ na sebe kolmé?

Lineární kombinace vektorů

V rovině:



Vektor $\overrightarrow{w}$ je *lineární kombinací* vektorů $\overrightarrow{u}$ a $\overrightarrow{v}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

V n-rozměrném prostoru:

DEFINICE (Lineární kombinace vektorů).
Lineární kombinace vektorů $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ stejného rozměru je vektor

$$\overrightarrow{w} = c_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + c_2 \cdot \overrightarrow{u_2} + \cdots + c_n \cdot \overrightarrow{u_n},$$

kde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

DEFINICE (Lineární závislost a nezávislost vektorů).
Vektory $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ stejného rozměru jsou

- **lineárně závislé**, jestliže alespoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních
- **lineárně nezávislé**, jestliže žádný z nich není lineární kombinací ostatních

Matice a operace s nimi

DEFINICE (Matice typu (m, n)).

Matice typu (m, n), kde $m, n \in \mathbb{N}$, je množina prvků (reálných čísel) uspořádaných do **m** řádků a **n** sloupců. Píšeme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ nebo } A = (a_{ij}),\ \text{kde } i = 1 \dots m,\ j = 1 \dots n$$

Když $m \neq n$, matice se nazývá *obdélníková.*
Když $m = n$, matice se nazývá *čtvercová.*

Prvky matice $a_{11}, a_{22}, \dots$ se nazývají *hlavní diagonála.*

DEFINICE (Druhy matic).

- *Nulová matice* - všechny prvky jsou rovny nule
- *Transponovaná matice* A^T - vznikne z matice A tak, že zaměníme řádky za sloupce. První řadek za první sloupec, druhý řádek za druhý sloupec. . .
- *Diagonální matice* - čtvercová matice, která má na hlavní diagonále libovolná nenulová čísla a mimo hlavní diagoválu má nuly
- *Jednotková matice I* - čtvercová matice, která má na hlavní diagonále jedničky a mimo hlavní diagoválu má nuly
- *Schodovitá (stupňová) matice* - každý další řádek začíná větším počtem nul než ten předchozí

Úlohy 2. K matici A napište matici transponovanou. Určete typ matice A. Určete typ matice A^T.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Úlohy 3. Napište jakoukoli nulovou matici, diagonální matici, jednotkovou matici, schodovitou matici.

DEFINICE (Operace s maticemi - sčítání a odčítání, násobení konstantou).
$A = (a_{ij})$ a $B = (a_{ij})$ jsou matice stejného typu (m, n), $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Pak platí

- $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$ **sečteme, resp. odečteme čísla na stejných místech**
- $c \cdot A = (c \cdot a_{ij})$ **konstantou c vynásobíme všechna čísla matice**

DEFINICE (Operace s maticemi - násobení matic).
$A = (a_{ij})$ je matice typu $(\mathbf{m}, \mathbf{p})$ a $B = (a_{ij})$ je matice typu $(\mathbf{p}, \mathbf{n})$. Pak platí

- $A \cdot B = (a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ip} \cdot b_{pj})$ **všechny řádky první matice vynásobíme se všemi sloupci druhé matice - viz příklad**

Součin matic $A \cdot B$ **existuje** pouze tehdy, když **počet sloupců první matice** A se rovná **počtu řádků druhé matice** B!!!

Součin matic $A \cdot B$ **není komutativní**, což znamená $A \cdot B \neq B \cdot A$!!!
$A \cdot B = B \cdot A$ jen v některých případech.

<u>*Příklad*</u>. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Vypočítejte $A \cdot B$, $B \cdot A$, A^2.

Řešení.

$A \cdot B$ existuje, protože A je typu $(3, \underline{3})$ a B je typu $(\underline{3}, 2)$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \\ -2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & -2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 5 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$B \cdot A$ neexistuje, protože B je typu $(3, \underline{2})$ a A je typu $(\underline{3}, 3)$.

$A^2 = A \cdot A$ existuje, protože A je typu $(3, \underline{3})$ a A je typu $(\underline{3}, 3)$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \\ -8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Úlohy 4. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Vypočítejte $C = 2A + B^T + 3I$, $D = 2(A - B) + A^T - I$.

Úlohy 5. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Vypočítejte $A \cdot B, B \cdot A, B \cdot C, C \cdot B, A \cdot C, C \cdot A, A^2, B^2, C^2$.

Hodnost matice

DEFINICE (Hodnost matice).

Hodnost nenulové matice je přirozené číslo, které udává počet *lineárně nezávislých řádků matice.*

Hodnost matice A značíme $h(A)$. Hodnost nulové matice je rovna nule.

DEFINICE (Ekvivalentní řádkové úpravy matice).

Ekvivalentní řádkové úpravy matice, které **nemění hodnost matice**, jsou

- libovolná záměna pořadí řádků
- vynásobení nebo vydělení všech prvků řádku *nenulovým* číslem
- přičtení k libovolnému řádku nenulový násobek jiného řádku
- vynechání nulového řádku
- vynechání řádku, který je násobkem jiného řádku

Ekvivalentními řádkovými úpravami převedeme matici A na matici B. Tyto matice jsou navzájem **ekvivalentní**, píšeme $A \sim B$.

Postup při zjišťování hodnosti matice:

1. matici převedeme pomocí ekvivalentních řádkových úprav na matici schodovitou
2. **lineárně závislé řádky se vynulují !!!**
3. hodnost matice se pak rovná počtu nenulových řádků ve schodovité matici (**tyto nenulové řádky jsou lineárně nezávislé!!!**)

Věta (Vztah mezi hodností matice a hodností matice transponované).
Hodnost matice A se transponováním matice *nezmění*. Pro A tedy platí

$$h(A) = h(A^T).$$

Úlohy 6. Vypočítejte hodnost matice.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$

Poznámka (**Lineární závislost a nezávislost vektorů**).
Mějme m vektorů stejného rozměru, které zapíšeme do řádků matice A. Vektory jsou

$*$ lineárně **závislé**, jestliže $h(A) < m$

$*$ lineárně **nezávislé**, jestliže $h(A) = m$

Úlohy 7. Určete lineární závislost či nezávislost vektorů:
1. $u_1 = (6, 3, 2, 3), u_2 = (4, 2, 1, 2), u_3 = (4, 2, 3, 2), u_4 = (2, 1, 7, 3)$
2. $u_1 = (3, 4, -1, 2, -9), u_2 = (1, -2, 3, -4, 19), u_3 = (1, -1, 1, -3, 7),$

$$u_4 = (-2, 3, 2, 1, -2)$$