MENDELU Agronomická fakulta

Mendelova univerzita v Brně

MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

MATM – MATEMATIKA

UŽITÍ DERIVACÍ, PRŮBĚH FUNKCE - ŘEŠENÍ ÚLOH

Mgr. Radka SMÝKALOVÁ, Ph.D.

radka.smykalova@mendelu.cz

Úlohy 1. (L'Hospitalovo pravidlo)

1. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-18}{x^3-9x}$

Řešení. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-18}{x^3-9x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+3x-18)'}{(x^3-9x)'}=\lim_{x\to 3}\frac{2x+3}{3x^2-9}=\frac{9}{18}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$

2. $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{x-2}$

Řešení. $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{x-2}=\left\|\frac{0}{0}\right\|\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(\ln(x-1))'}{(x-2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x-1}\cdot 1}{1}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-1}=\underline{\underline{1}}.$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x\ln x}$

Řešení. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x\ln x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x-x+1)'}{(x\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{(x)'(\ln x)+(x)(\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{x}}{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{x}}{\ln x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1}{\ln x+1}=$
$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x(\ln x+1)}=\frac{0}{1}=\underline{\underline{0}}.$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^x}{\sin x}$

Řešení. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^x}{\sin x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\mathrm{e}^x)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\mathrm{e}^x}{\cos x}=\frac{-1}{1}=\underline{\underline{-1}}.$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}{x^2}$

Řešení. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}{x^2}=\left\|\frac{0}{0}\right\|\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\cdot(-1)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\cdot(-1)}{2}=$
$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{2}{2}=\underline{\underline{1}}.$

6. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{2+x}}$

Řešení. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{2+x}}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)'}{(\sqrt{2+x})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+x}}\cdot 1}=\lim_{x\to\infty}2\sqrt{2+x}=\underline{\underline{\infty}}.$

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(3x+1)}{x}$

Řešení. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(3x+1)}{x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(3x+1))'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3x+1}\cdot 3}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{3x+1}=\frac{3}{\infty}=\underline{\underline{0}}.$

8. $\lim_{x\to\infty}\frac{3-x^2}{\mathrm{e}^{2x}}$

Řešení. $\lim_{x\to\infty}\frac{3-x^2}{\mathrm{e}^{2x}}=\left\|\frac{-\infty}{\infty}\right\|\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(3-x^2)'}{(\mathrm{e}^{2x})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{\mathrm{e}^{2x}\cdot 2}=$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\mathrm{e}^{2x}}=\left\|\frac{-\infty}{\infty}\right\|\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)'}{(\mathrm{e}^{2x})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\mathrm{e}^{2x}\cdot 2}=\frac{-1}{\infty}=\underline{\underline{0}}.$

Úlohy 2. Vyšetřete průběh funkce:

1. $y = x^3 - 2x^2 + x$

Řešení.

- ⋆ Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- ⋆ Limity v nevlastních bodech:

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - 2x^2 + x = \lim_{x\to-\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 2x^2 + x = \lim_{x\to\infty} x^3 = (\infty)^3 = \infty$$

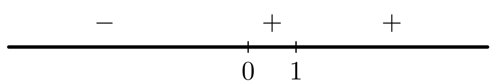
- ⋆ Průsečíky s osou x $(y = 0)$, průsečík s osou y $(x = 0)$:

$$\begin{aligned} y &= 0 & x &= 0 \\ 0 &= x^3 - 2x^2 + x & y &= 0^3 - 2\cdot 0^2 + 0 \\ 0 &= x(x^2 - 2x + 1) & y &= 0 \\ 0 &= x(x-1)^2 & & \end{aligned}$$

S osou x: $[0, 0], [1, 0]$
S osou y: $[0, 0]$
Znaménko funkce ($f(x) > 0 \Rightarrow$ kladná, $f(x) < 0 \Rightarrow$ záporná):

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + x &> 0 & x^3 - 2x^2 + x &< 0 \\ x(x^2 - 2x + 1) &> 0 & x(x^2 - 2x + 1) &< 0 \\ x(x-1)^2 &> 0 & x(x-1)^2 &< 0 \end{aligned}$$

Nulové body: $0, 1$



Kladná: $(0, \infty)$
Záporná: $(-\infty, 0)$

★ Parita - sudá ($f(x) = f(-x)$), lichá ($f(x) = -f(-x)$), ani jedno, obojí

$$\begin{aligned} f(x) &= \underline{x^3 - 2x^2 + x} \\ f(-x) &= (-x)^3 - 2(-x)^2 + (-x) \\ f(-x) &= \underline{-x^3 - 2x^2 - x} \\ f(x) &\neq f(-x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(x) &= \underline{x^3 - 2x^2 + x} \\ -[f(-x)] &= -\left[-x^3 - 2x^2 - x\right] \\ -f(-x) &= \underline{x^3 + 2x^2 + x} \\ f(x) &\neq -f(-x) \end{aligned}$$

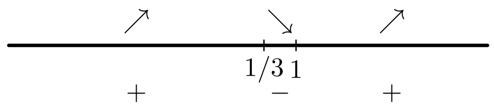
Není sudá, není lichá.

★ Monotónnost a lokální extrémy - pomocí první derivace

$$y' = (x^3 - 2x^2 + x)' = (x^3)' - (2x^2)' + (x)' = 3x^2 - 2(x^2)' + 1 = \underline{3x^2 - 4x + 1}$$

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ 3x^2 - 4x + 1 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Nulové body: $1, \frac{1}{3}$



Roste: $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$
Klesá: $(\frac{1}{3}, 1)$
V bodě $x = \frac{1}{3}$ je lokální maximum a v bodě $x = 1$ je lokální minimum.
Lokální minimim: $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0$. Souřadnice $[1, 0]$.
Lokální maximum: $f(\frac{1}{3}) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$. Souřadnice $[\frac{1}{3}, \frac{4}{27}]$.

⋆ Konvexnost, konkávnost a inflexní body - pomocí druhé derivace

$$y'' = (3x^2 - 4x + 1)' = (3x^2)' - (4x)' + (1)' = 3(x^2)' - 4(x) + 0 = \underline{6x - 4}$$

$$\begin{aligned} y'' &= 0 \\ 6x - 4 &= 0 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

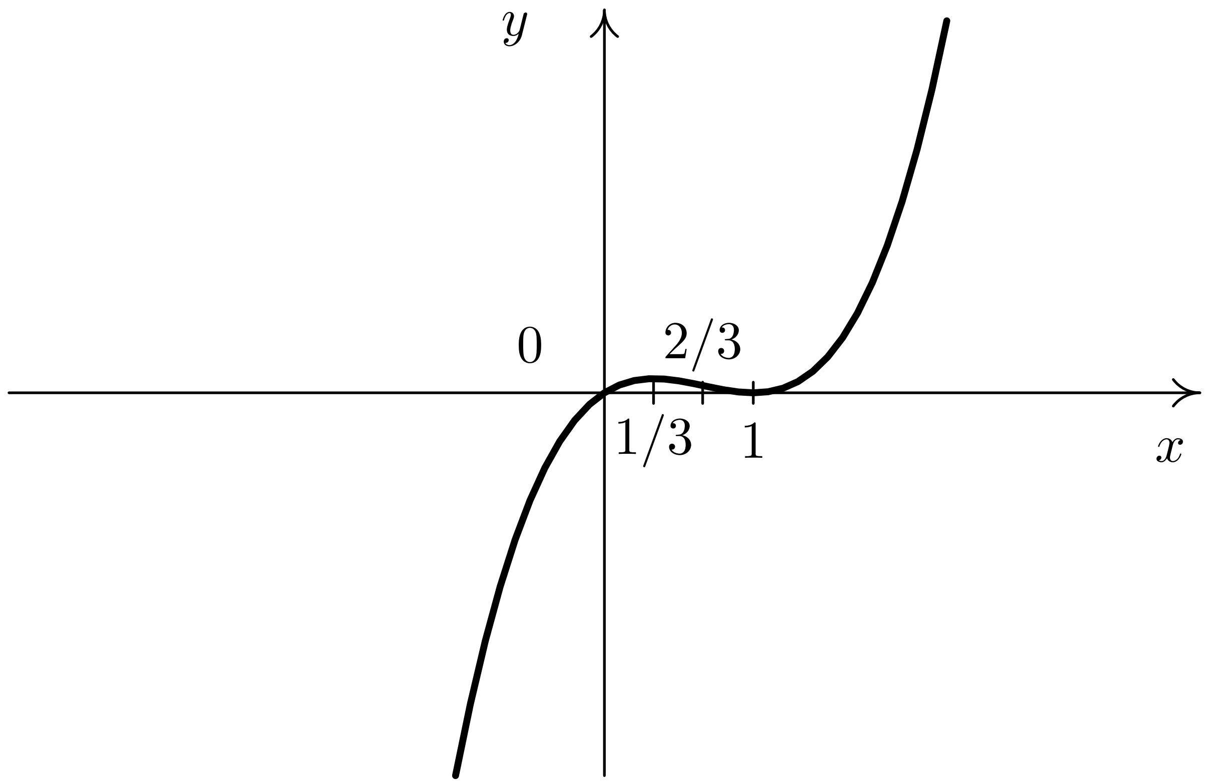
Nulové body: $\frac{2}{3}$

$\cap$		$\cup$
$-$	$2/3$	$+$

Konvexní: $(\frac{2}{3}, \infty)$
Konkávní: $(-\infty, \frac{2}{3})$

Inflexní bod je $x = \frac{2}{3}$.
Inflexní bod: $f(\frac{2}{3}) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$. Souřadnice $[\frac{2}{3}, \frac{2}{27}]$.

⋆ Graf



2. $y = \frac{x^2+1}{x}$

Řešení.

⋆ Definiční obor: $x \neq 0 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

V bodě $x = 0$ pomocí jednostranných limit - jak se chová funkce v jeho okolí.

$$0^- : \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = \left\| \frac{0^2+1}{0^-} \right\| = \left\| \frac{1}{-0,000\ldots001} \right\| = -\infty$$

$$0^+ : \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \left\| \frac{0^2+1}{0^+} \right\| = \left\| \frac{1}{0,000\ldots001} \right\| = \infty$$

⋆ Limity v nevlastních bodech:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to \infty} x = \infty$$

⋆ Průsečíky s osou x $(y = 0)$, průsečík s osou y $(x = 0)$:

$$\begin{array}{ll} y = 0 & x = 0 \\ 0 = \dfrac{x^2+1}{x} & y = \dfrac{0^2+1}{0} \\ 0 = x^2+1 & \text{nesmysl} \\ x \notin \mathbb{R} & \end{array}$$

S osou x: nemá

S osou y: nemá

Znaménko funkce ($f(x) > 0 \Rightarrow$ kladná, $f(x) < 0 \Rightarrow$ záporná):

$$\frac{x^2+1}{x} > 0 \qquad \frac{x^2+1}{x} < 0$$

Nulové body čitatele: $x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \notin \mathbb{R}$

Nulové body jmenovatele: $x = 0$

Nulové body: 0

$$\begin{array}{ccc} & - & & + & \\ \hline & & 0 & & \end{array}$$

Kladná: $(0, \infty)$
Záporná: $(-\infty, 0)$

⋆ Parita - sudá ($f(x) = f(-x)$), lichá ($f(x) = -f(-x)$), ani jedno, obojí

$$\begin{aligned} f(x) &= \underline{\underline{\frac{x^2+1}{x}}} & \qquad f(x) &= \underline{\underline{\frac{x^2+1}{x}}} \\ f(-x) &= \frac{(-x)^2+1}{(-x)} & -[f(-x)] &= -\left[-\frac{x^2+1}{x}\right] \\ f(-x) &= \underline{\underline{-\frac{x^2+1}{x}}} & -f(-x) &= \underline{\underline{\frac{x^2+1}{x}}} \\ f(x) &\neq f(-x) & f(x) &= -f(-x) \end{aligned}$$

Není sudá, je lichá.

⋆ Monotónnost a lokální extrémy - pomocí první derivace

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \frac{(x^2+1)'(x) - (x^2+1)(x)'}{x^2} = \\ &= \frac{(2x)(x) - (x^2+1)(1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \underline{\underline{\frac{x^2-1}{x^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ \frac{x^2-1}{x^2} &= 0 \end{aligned}$$

Čitatel i jmenovatel se rovná nule:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 & \qquad x^2 &= 0 \\ (x-1)(x+1) &= 0 & x &= 0 \end{aligned}$$

Nulové body: $1, -1, 0$

$$\begin{array}{ccccccc} \nearrow & & \searrow & & \searrow & & \nearrow \\ \hline & -1 & & 0 & & 1 & \\ + & & - & & - & & + \end{array}$$

Roste: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Klesá: $(-1, 0) \cup (0, 1)$
V bodě $x = -1$ je lokální maximum a v bodě $x = 1$ je lokální minimum.
Lokální minimum: $f(1) = \frac{1^2+1}{1} = 2$. Souřadnice $[1, 2]$.
Lokální maximum: $f(-1) = \frac{(-1)^2+1}{-1} = -2$. Souřadnice $[-1, -2]$.

⋆ Konvexnost, konkávnost a inflexní body - pomocí druhé derivace

$$y'' = \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)' = \frac{(x^2-1)'(x^2) - (x^2-1)(x^2)'}{x^4} =$$
$$= \frac{(2x)(x^2) - (x^2-1)(2x)}{x^4} = \frac{2x^3 - (2x^3 - 2x)}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \underline{\underline{\frac{2}{x^3}}}$$

$$y'' = 0$$
$$\frac{2}{x^3} = 0$$

Čitatel i jmenovatel se rovná nule:

$$\begin{array}{cc} 2 = 0 & x^3 = 0 \\ \text{nesmysl} & x = 0 \end{array}$$

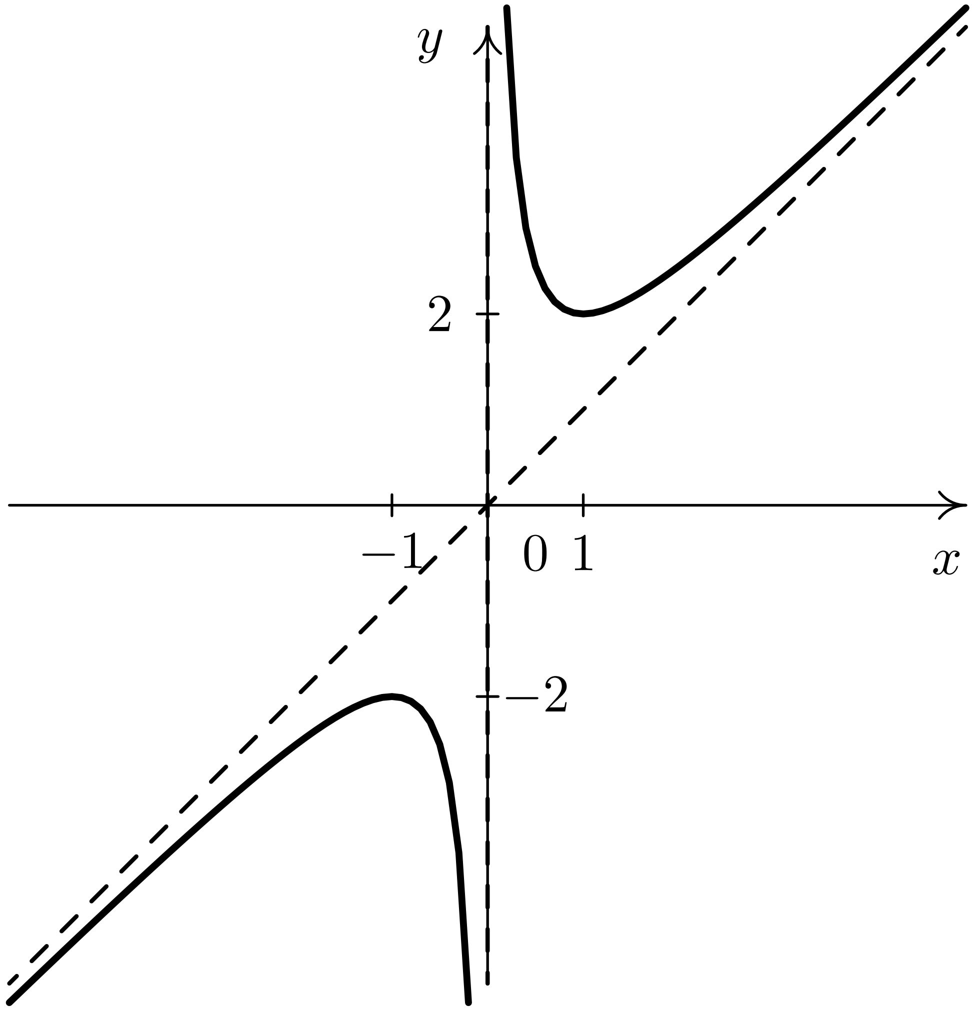
Nulové body: 0

$$\begin{array}{ccc} \cap & & \cup \\ \hline - & 0 & + \end{array}$$

Konvexní: $(0, \infty)$
Konkávní: $(-\infty, 0)$

Inflexní bod funkce nemá.

⋆ Graf



3. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

Řešení.

⋆ Definiční obor: $(x^2-1) \neq 0 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$

V bodech $x = 1$, $x = -1$ pomocí jednostranných limit - jak se chová funkce v jejich okolí.

1^- :
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = \left\| \frac{1^2}{(1^-)^2-1} \right\| = \left\| \frac{1}{(0,999)^2-1} \right\| = \left\| \frac{1}{0,999-1} \right\| = \left\| \frac{1}{-0,000\ldots001} \right\| = -\infty$$

1^+ :
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = \left\| \frac{1^2}{(1^+)^2-1} \right\| = \left\| \frac{1}{(1,000\ldots001)^2-1} \right\| = \left\| \frac{1}{1,000\ldots001-1} \right\| = \left\| \frac{1}{0,000\ldots001} \right\| = \infty$$

-1^- :
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = \left\| \frac{(-1)^2}{(-1^-)^2-1} \right\| = \left\| \frac{1}{(-1,000\ldots001)^2-1} \right\| = \left\| \frac{1}{1,000\ldots001-1} \right\| = \left\| \frac{1}{0,000\ldots001} \right\| = \infty$$

-1^+ :
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = \left\| \frac{(-1)^2}{(-1^+)^2-1} \right\| = \left\| \frac{1}{(-0,999)^2-1} \right\| = \left\| \frac{1}{0,999-1} \right\| = \left\| \frac{1}{-0,000\ldots001} \right\| = -\infty$$

★ Limity v nevlastních bodech:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$$

★ Průsečíky s osou x ($y = 0$), průsečík s osou y ($x = 0$):

$$\begin{aligned} y &= 0 & x &= 0 \\ 0 &= \frac{x^2}{x^2-1} & y &= \frac{0^2}{0^2-1} \\ 0 &= x^2 & y &= \frac{0}{-1} \\ x &= 0 & y &= 0 \end{aligned}$$

S osou x: $[0, 0]$
S osou y: $[0, 0]$
Znaménko funkce ($f(x) > 0 \Rightarrow$ kladná, $f(x) < 0 \Rightarrow$ záporná):

$$\frac{x^2}{x^2-1} > 0 \qquad \frac{x^2}{x^2-1} < 0$$

$$\begin{aligned} \text{Nulové body čitatele: } x^2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 0 \\ \text{Nulové body jmenovatele: } x^2 - 1 = 0 \quad & \\ (x-1)(x+1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 1, -1 \end{aligned}$$

Nulové body: $0, 1, -1$

$$\begin{array}{ccccccc} + & & - & & - & & + \\ \hline & -1 & & 0 & & 1 & \end{array}$$

Kladná: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Záporná: $(-1, 1)$

★ Parita - sudá ($f(x) = f(-x)$), lichá ($f(x) = -f(-x)$), ani jedno, obojí

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2}{x^2-1} & f(x) &= \frac{x^2}{x^2-1} \\
f(-x) &= \frac{(-x)^2}{(-x)^2-1} & -[f(-x)] &= -\left[\frac{x^2}{x^2-1}\right] \\
f(-x) &= \frac{x^2}{x^2-1} & -f(-x) &= -\frac{x^2}{x^2-1} \\
f(x) &= f(-x) & f(x) &\neq -f(-x)
\end{aligned}
$$

Je sudá, není lichá.

★ Monotónnost a lokální extrémy - pomocí první derivace

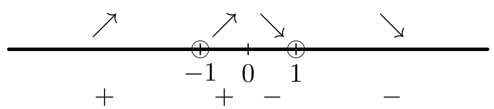
$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^2)'(x^2-1)-(x^2)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \\
&= \frac{(2x)(x^2-1)-(x^2)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y' &= 0 \\
\frac{-2x}{(x^2-1)^2} &= 0
\end{aligned}
$$

Čitatel i jmenovatel se rovná nule:

$$
\begin{aligned}
-2x &= 0 & (x^2-1)^2 &= 0 \\
x &= 0 & x^2-1 &= 0 \\
& & (x-1)(x+1) &= 0 \\
& & x &= 1, -1
\end{aligned}
$$

Nulové body: $0, 1, -1$



Roste: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
Klesá: $(0, 1) \cup (1, \infty)$
V bodě $x = 0$ je lokální maximum.
Lokální maximum: $f(0) = \frac{0^2}{0^2-1} = \frac{0}{-1} = 0$. Souřadnice $[0, 0]$.

★ Konvexnost, konkávnost a inflexní body - pomocí druhé derivace

$$
\begin{aligned}
y'' = \left(\frac{-2x}{(x^2-1)^2}\right)' &= \frac{(-2x)'((x^2-1)^2) - (-2x)((x^2-1)^2)'}{(x^2-1)^4} = \\
&= \frac{(-2)(x^2-1)^2 + 2x(2(x^2-1)\cdot 2x)}{(x^2-1)^4} = \frac{(-2)(x^2-1)^2 + 8x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \\
&= \frac{(x^2-1)\cdot\left[-2(x^2-1)+8x^2\right]}{(x^2-1)^4} = \frac{\left[-2x^2+2+8x^2\right]}{(x^2-1)^3} = \underline{\underline{\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y'' &= 0 \\
\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} &= 0
\end{aligned}
$$

Čitatel i jmenovatel se rovná nule:

$$6x^2 + 2 = 0$$

kvadratická rovnice, která nemá řešení

$$
\begin{aligned}
(x^2-1)^3 &= 0 \\
x^2 - 1 &= 0 \\
(x-1)(x+1) &= 0 \\
x &= 1, -1
\end{aligned}
$$

Nulové body: $1, -1$

$$
\begin{array}{ccccc}
\cup & & \cap & & \cup \\
\hline
+ & -1 & - & 1 & +
\end{array}
$$

Konvexní: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Konkávní: $(-1, 1)$

Inflexní bod funkce nemá.

⋆ Graf