MENDELU Agronomická fakulta

Mendelova univerzita v Brně

MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

MATM – MATEMATIKA

$\boxed{\text{UŽITÍ DERIVACÍ, PRŮBĚH FUNKCE}}$

Mgr. Radka SMÝKALOVÁ, Ph.D.

radka.smykalova@mendelu.cz

L'Hospitalovo pravidlo

Slouží k výpočtu limit *neurčitých výrazů.*

VĚTA (L'Hospitalovo pravidlo).
$f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Jestliže

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\|\frac{0}{0}\right\| \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\|\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right\|, \qquad \text{pak platí}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Pokud limita na pravé straně existuje.)

L'Hospitalovo pravidlo lze použít opakovaně!

Příklad.

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{(\mathrm{e}^x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\mathrm{e}^x} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{(\mathrm{e}^x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\mathrm{e}^x} = \frac{2}{\infty} = 0.$

Neplést si L'Hospitalovo pravidlo s pravidlem pro derivaci zlomku P4!

Úlohy 1.

1. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-18}{x^3-9x}$ **2.** $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{x-2}$ **3.** $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x\ln x}$ **4.** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^x}{\sin x}$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}{x^2}$ **6.** $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{2+x}}$ **7.** $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(3x+1)}{x}$ **8.** $\lim_{x\to\infty}\frac{3-x^2}{\mathrm{e}^{2x}}$

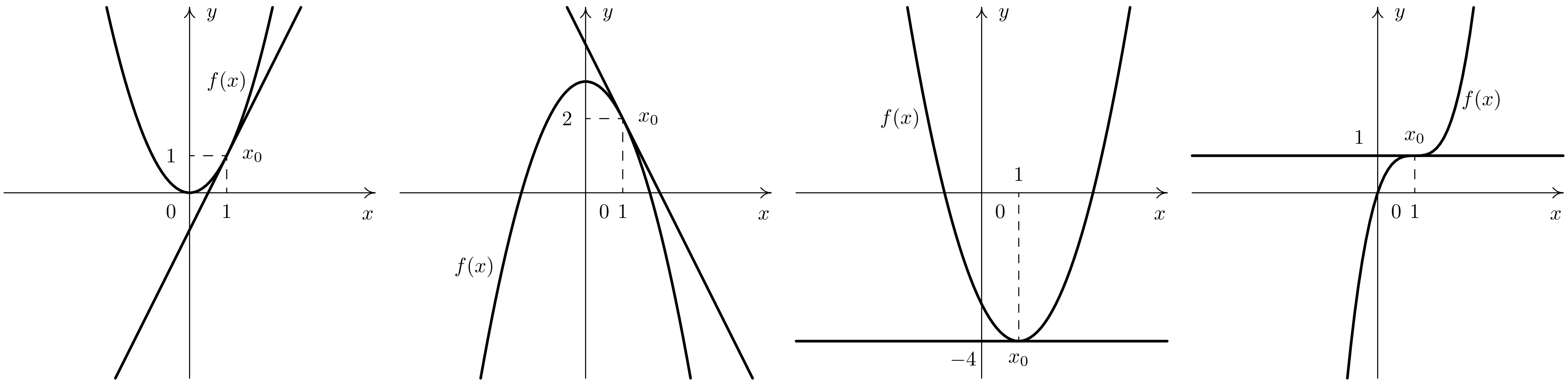
Monotónnost funkce. Lokální extrémy

Vztah mezi směrnicí tečny v bodě ($f'(x_0)$) a monotónností funkce v bodě x_0

Jestliže tečna funkce $f(x)$ v bodě x_0 *roste* ($f'(x_0) > 0$), pak *roste* v bodě x_0 i funkce $f(x)$.

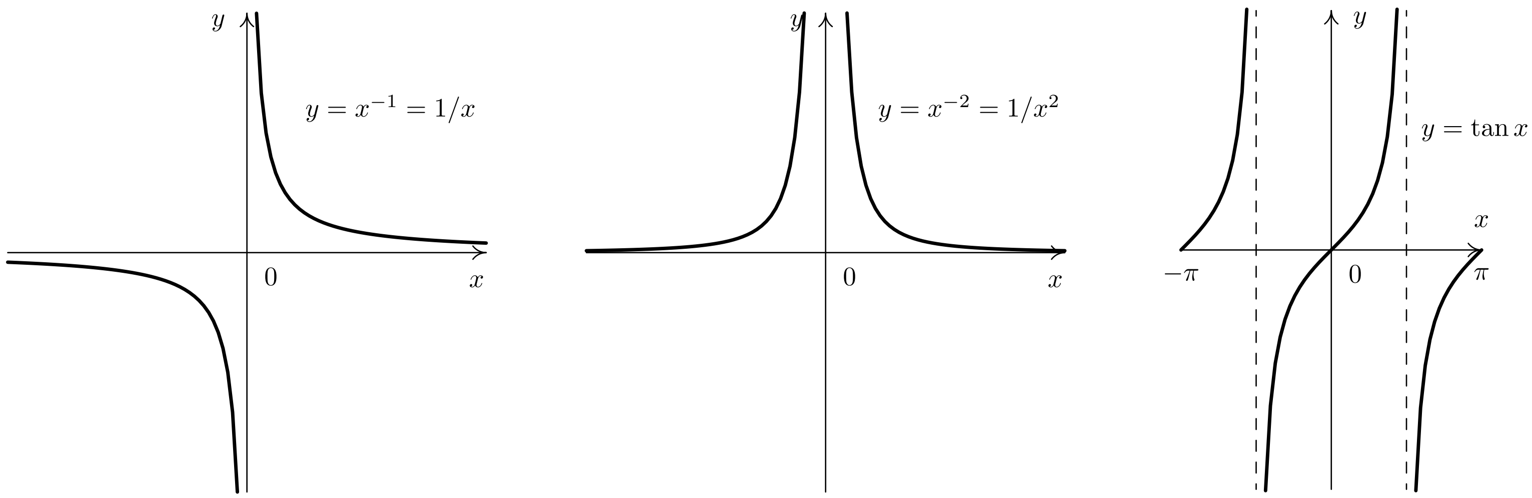
Jestliže tečna funkce $f(x)$ v bodě x_0 *klesá* ($f'(x_0) < 0$), pak *klesá* v bodě x_0 i funkce $f(x)$.

Jestliže je tečna funkce $f(x)$ v bodě x_0 *konstantní* ($f'(x_0) = 0$), pak se v bodě x_0 *mění* nebo *nemění* monotónnost funkce $f(x)$.



Změna monotónnosti v bodech, kde funkce $f(x)$ není definovaná

V bodech, kde funkce $f(x)$ není definovaná, se *mění* nebo *nemění* monotónnost funkce $f(x)$.



VĚTA (Vztah mezi monotónností v bodě a monotónností na intervalu).

Funkce je *rostoucí* na otevřeném intervalu právě tehdy, když je *rostoucí* v každém bodě x_0 tohoto intervalu.

Funkce je *klesající* na otevřeném intervalu právě tehdy, když je *klesající* v každém bodě x_0 tohoto intervalu.

VĚTA (Vztah mezi derivací funkce na intervalu a monotónností na intervalu).

Nechť má funkce $f(x)$ derivaci na otevřeném intervalu (má derivaci v každém bodě x_0 intervalu). Pak

- jestliže $f'(x) > 0$ pro každé x z intervalu, pak je $f(x)$ na intervalu *rostoucí*
- jestliže $f'(x) < 0$ pro každé x z intervalu, pak je $f(x)$ na intervalu *klesající*

DEFINICE (Lokální extrémy - lokální maximum a minimum).

Nechť je funkce $f(x)$ v bodě x_0 definovaná. Řekneme, že funkce má v tomto bodě

- *lokální maximum*, jestliže pro každé x z ryzího okolí bodu x_0 platí

$$f(x_0) > f(x)$$

- *lokální minimum*, jestliže pro každé x z ryzího okolí bodu x_0 platí

$$f(x_0) < f(x)$$

VĚTA (Vztah mezi lokálními extrémy v bodě x_0 a derivací v bodě x_0).

Nechť má funkce $f(x)$ v bodě lokální extrém a nechť existuje derivace funkce v bodě $f'(x_0)$. Pak

$$f'(x_0) = 0.$$

DEFINICE (Stacionární bod).

Bod x_0, pro který platí, že $f'(x_0) = 0$, se nazývá *stacionární bod.* (Je to tzv. *podezřelý bod z extrému* - bude nebo nebude zde lokální extrém.)

DEFINICE (Absolutní extrémy - absolutní maximum a minimum).

Funkce $f(x)$ definovaná na intervalu má v bodě x_0 *absolutní maximum (minimim)*, právě tehdy, když v tomto bodě nabývá své největší (nejmenší) funkční hodnoty.

Postup při zjišťování monotónnosti funkce $y = f(x)$ a extrémů funkce

⋆ Vypočítáme derivaci funkce

$$y' = f'(x)$$

⋆ Vypočítáme, v jakých bodech je derivace rovna nule - stacionární body.
(Jsou to body, kde se může měnit monotónnost, tedy zde funkce může mít lokální extrém.)

$$y' = 0$$

Pokud je

$$y' = \text{ zlomek},$$

vypočítáme i nulové body jmenovatele, jelikož znaménko zlomku závisí i na znaménku jmenovatele!

⋆ Vypočítáme, v jakých bodech funkce není definovaná.
(Jsou to body, kde se může měnit monotónnost.)

⋆ Nalezené body vyznačíme na číselné ose. Získáme tak několik intervalů. **Z každého intervalu si zvolíme libovolný bod a dosadíme do derivace.**
Když vyjde **kladné** číslo, v celém intervalu funkce **roste**, když vyjde **záporné** číslo, v celém intervalu funkce **klesá**.

⋆ V bodech, kde je funkce definovaná a mění se zde monotónnost, má funkce lokální extrém. Změna $+$ na $-$ je maximum. Změna $-$ na $+$ je minimum.

⋆ Když má funkce v bodě x_0 extrém, jeho souřadnice na funkci jsou $[x_0, f(x_0)]$. Tedy y-ovou souřadnici vypočítáme dosazením x_0 do předpisu funkce, čímž vypočítáme funkční hodnotu v bodě x_0.

Konvexnost, konkávnost. Inflexní body

DEFINICE (Konvexnost $\cup$, konkávnost $\cap$).

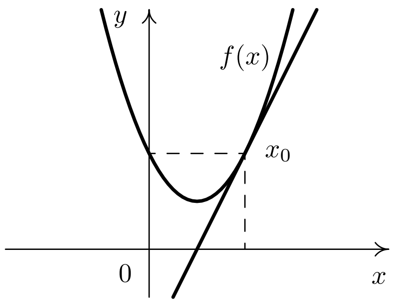
Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci. Pak je

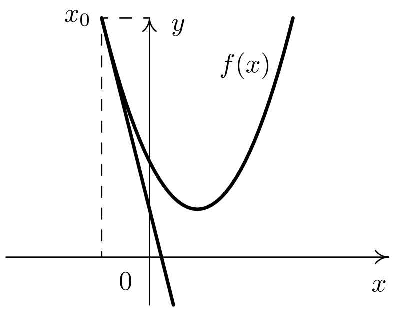
- *konvexní* v bodě x_0, jestliže pro všechna x z ryzího okolí bodu x_0 leží graf funkce $f(x)$ *nad tečnou* sestrojenou ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0. Tedy

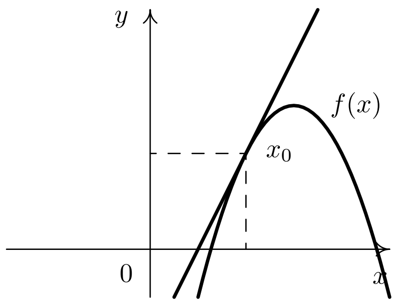
$$f(x) > f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

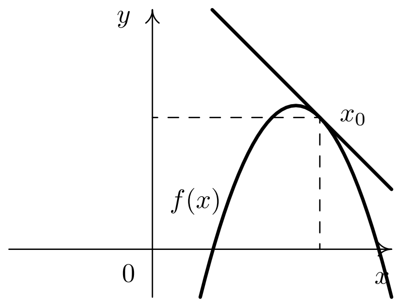
- *konkávní* v bodě x_0, jestliže pro všechna x z ryzího okolí bodu x_0 leží graf funkce $f(x)$ *pod tečnou* sestrojenou ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0. Tedy

$$f(x) < f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$









- *konvexní (konkávní) na otevřeném intervalu*, jestliže je konvexní (konkávní) v každém jeho bodě

VĚTA (Vztah konvexnosti a konkávnosti s druhou derivací v bodě x_0)

Nechť má funkce $f(x)$ druhou derivaci v bodě x_0. Je-li

- $f''(x_0) > 0$, pak je funkce $f(x)$ *konvexní* v bodě x_0
- $f''(x_0) < 0$, pak je funkce $f(x)$ *konkávní* v bodě x_0

VĚTA (Vztah konvexnosti a konkávnosti s druhou derivací na intervalu)

Nechť má funkce $f(x)$ druhou derivaci na otevřeném intervalu. Je-li

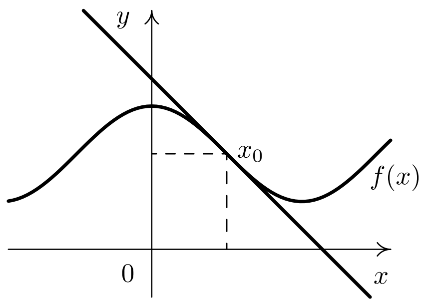
- $f''(x) > 0$ pro každé x z intervalu, pak je funkce $f(x)$ *konvexní* na intervalu
- $f''(x) < 0$ pro každé x z intervalu, pak je funkce $f(x)$ *konkávní* na intervalu

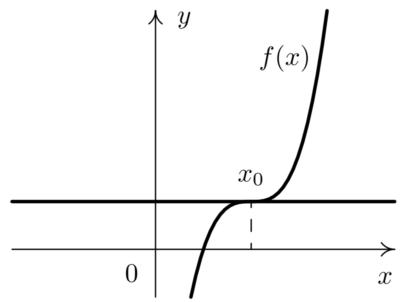
DEFINICE (Inflexní bod)

Bod x_0 na funkci, ve kterém existuje ke grafu funkce právě jedna tečna a graf funkce v něm přechází z konvexity do konkávity (nebo naopak), tj. z jedné strany tečny na druhou, se nazývá *inflexní bod*.

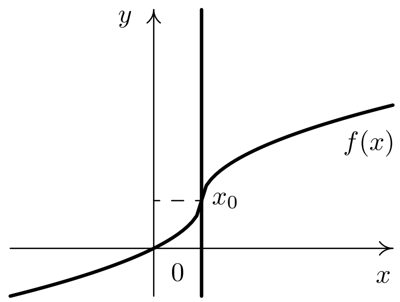
Funkce $f(x)$ může mít inflexní bod v takovém bodě x_0, kde

※ $f''(x_0) = 0$





※ $f''(x_0)$ neexistuje



Postup při zjišťování konvexnosti, konkávnosti a inflexních bodů funkce $f(x)$

⋆ Vypočítáme druhou derivaci funkce

$$y'' = f''(x)$$

⋆ Vypočítáme, v jakých bodech je druhá derivace rovna nule.
(Jsou to body, kde se může měnit konvexnost na konkávnost (nebo naopak), tedy zde funkce může mít inflexní bod.)

$$y'' = 0$$

Pokud je

$$y'' = \text{ zlomek},$$

vypočítáme i nulové body jmenovatele, jelikož znaménko zlomku závisí i na znaménku jmenovatele!

⋆ Vypočítáme, v jakých bodech funkce není definovaná.
(Jsou to body, kde se může měnit konvexnost na konkávnost (nebo naopak).)

⋆ Nalezené body vyznačíme na číselné ose. Získáme tak několik intervalů.
Z každého intervalu si zvolíme libovolný bod a dosadíme do druhé derivace.
Když vyjde **kladné** číslo, v celém intervalu je funkce **konvexní**, když vyjde **záporné** číslo, v celém intervalu je funkce **konkávní**.

⋆ V bodech, kde je funkce definovaná a mění se zde konvexnost na konkávnost (nebo naopak), má funkce inflexní bod.

⋆ Když je x_0 inflexní bod funkce, jeho souřadnice na funkci jsou $[x_0, f(x_0)]$.
Tedy y-ovou souřadnici vypočítáme dosazením x_0 do předpisu funkce, čímž vypočítáme funkční hodnotu v bodě x_0.

Průběh funkce

Ze zadaného předpisu funkce $y = f(x)$ postupným počítáním nakreslíme její graf.

Postup při vyšetřování průběhu funkce $y = f(x)$

- ⋆ Definiční obor. V bodech nespojitosti pomocí **jednostranných limit** - jak se chová funkce v jejich okolí.
- ⋆ Pomocí **limit** - jak se funkce chová v nevlastních bodech ∞, $-\infty$.
- ⋆ Průsečíky s osou x a osou y. Znaménko funkce -kde je funkce nad/pod osou x.
- ⋆ Parita - sudá, lichá, ani jedno, obojí.
- ⋆ Monotónnost a lokální extrémy - pomocí **první** derivace.
- ⋆ Konvexnost, konkávnost a inflexní body - pomocí **druhé** derivace.
- ⋆ Graf.

Příklad. Vyšetřete průběh funkce:

1. $y = 3x - x^3$

Řešení.

⋆ Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

⋆ Limity v nevlastních bodech:

$$\lim_{x\to-\infty} 3x - x^3 = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = -(-\infty)^3 = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} 3x - x^3 = \lim_{x\to\infty} -x^3 = -(\infty)^3 = -\infty$$

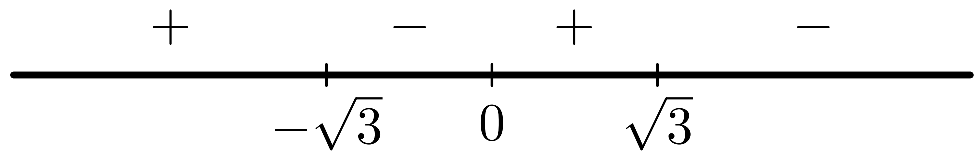
⋆ Průsečíky s osou x $(y = 0)$, průsečík s osou y $(x = 0)$:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ 0 &= 3x - x^3 \\ 0 &= x(3 - x^2) \\ 0 &= x(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 3 \cdot 0 - 0^3 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

S osou x: $[0,0], [\sqrt{3},0], [-\sqrt{3},0]$
S osou y: $[0,0]$
Znaménko funkce ($f(x)>0 \Rightarrow$ kladná, $f(x)<0 \Rightarrow$ záporná):

$$\begin{aligned} 3x - x^3 &> 0 & \qquad 3x - x^3 &< 0 \\ x(3-x^2) &> 0 & x(3-x^2) &< 0 \\ x(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x) &> 0 & x(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x) &< 0 \end{aligned}$$

Nulové body: $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$



Kladná: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
Záporná: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

★ Parita - sudá ($f(x) = f(-x)$), lichá ($f(x) = -f(-x)$), ani jedno, obojí

$$f(x) = \underline{3x - x^3} \qquad\qquad f(x) = \underline{3x - x^3}$$

$$f(-x) = 3(-x) - (-x)^3 \qquad\qquad -[f(-x)] = -\left[-3x + x^3\right]$$

$$f(-x) = -3x - (-x^3) = \underline{-3x + x^3} \qquad\qquad -f(-x) = \underline{3x - x^3}$$

$$f(x) \neq f(-x) \qquad\qquad f(x) = -f(-x)$$

Není sudá, je lichá.

★ Monotónnost a lokální extrémy - pomocí první derivace

$$y' = (3x - x^3)' = (3x)' - (x^3)' = 3(x)' - 3x^2 = \underline{3 - 3x^2}$$

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ 3 - 3x^2 &= 0 \\ 3(1 - x^2) &= 0 \\ 3(1 - x)(1 + x) &= 0 \end{aligned}$$

Nulové body: $1, -1$

$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
$-$	-1	$+$	1	$-$

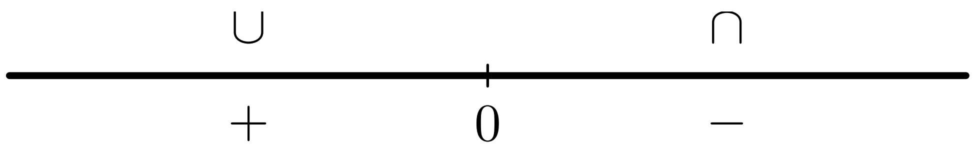
Roste: $(-1, 1)$
Klesá: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
V bodě $x = -1$ je lokální minimum a v bodě $x = 1$ je lokální maximum.
Lokální minimim: $f(-1) = 3 \cdot (-1) - (-1)^3 = -2$. Souřadnice $[-1, -2]$.
Lokální maximum: $f(1) = 3 \cdot 1 - 1^3 = 2$. Souřadnice $[1, 2]$.

⋆ Konvexnost, konkávnost a inflexní body - pomocí druhé derivace

$$y'' = (3 - 3x^2)' = (3)' - (3x^2)' = 0 - 3(x^2)' = -3 \cdot 2x = \underline{-6x}$$

$$\begin{aligned} y'' &= 0 \\ -6x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

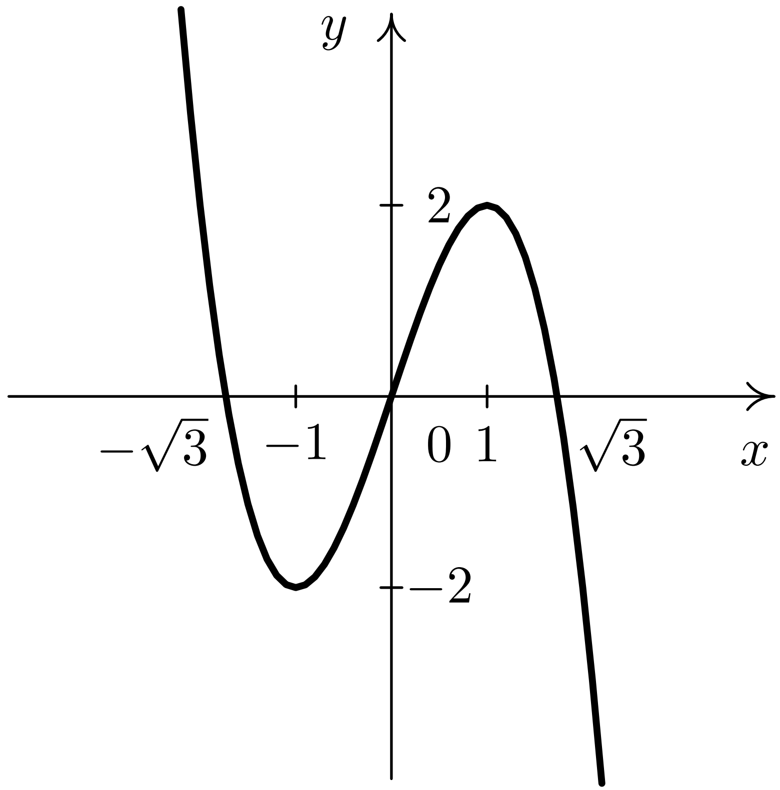
Nulové body: 0



Konvexní: $(-\infty, 0)$
Konkávní: $(0, \infty)$

Inflexní bod je $x = 0$.
Inflexní bod: $f(0) = 3 \cdot 0 - 0^3 = 0$. Souřadnice $[0, 0]$.

⋆ Graf



Úlohy 2.

1. $y = x^3 - 2x^2 + x$ **2.** $y = \frac{x^2+1}{x}$ **3.** $y = \frac{x^2}{x^2-1}$