MENDELU Agronomická fakulta

Mendelova univerzita v Brně

MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

MATM – MATEMATIKA

URČITÝ INTEGRÁL - ŘEŠENÍ ÚLOH

Mgr. Radka SMÝKALOVÁ, Ph.D.

radka.smykalova@mendelu.cz

Úlohy 1.

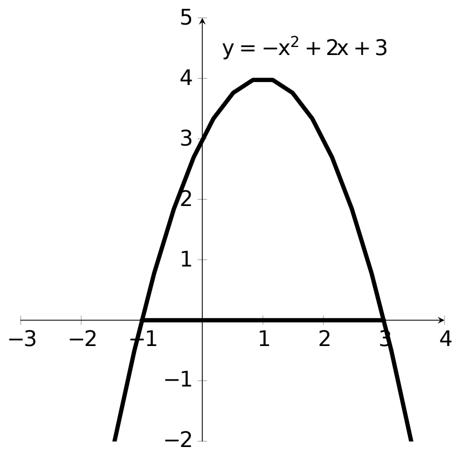
1. Určete obsah oblasti ohraničené parabolou $y = -x^2 + 2x + 3$ a osou x.

Řešení. Nakreslíme graf funkce a z něho vidíme oblast, jejíž obsah budeme počítat. Jde o parabolu otočenou dolů s průsečíky s osami $[-1,0], [3,0]$ a $[0,3]$ a vrcholem v bodě $[1,4]$. To jsme zjistili pomocí úprav a výpočtů:

$$y = 0: \ 0 = -x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x - 3) = -(x+1)(x-3) \qquad x = -1, x = 3$$

$$x = 0: \ y = -0^2 + 0x + 3 = 3$$

$$\text{doplníme na čtverec: } y = -x^2 + 2x + 3 = -[x^2 - 2x] + 3 = -[(x-1)^2 - 1] + 3 = -(x-1)^2 + 1 + 3 = -(x-1)^2 + 4 \qquad \text{vrchol } [1,4]$$

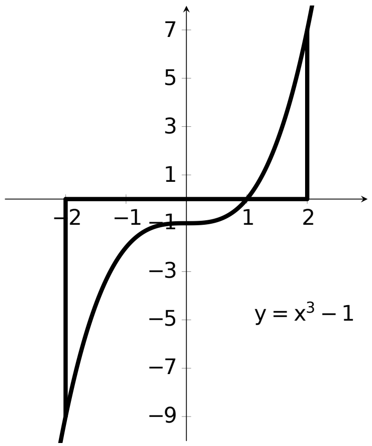


Sestavíme určitý integrál a počítáme:

$$S = \int_{-1}^{3} -x^2 + 2x + 3 \, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^{3} = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^{3} =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3 \cdot (-1) \right) = (-9 + 9 + 9) - (\frac{1}{3} + 1 - 3) = \underline{\underline{\frac{32}{3} j^2}}$$

2. Určete obsah oblasti ohraničené funkcí $y = x^3 - 1$ a osou x, $x \in \langle -2, 2 \rangle$.
Řešení. Nakreslíme graf funkce a omezení na ose x. Vidíme oblast, jejíž obsah budeme počítat. Jde o kubickou křivku posunutou o 1 dolů. Průsečíky s osami jsou $[1, 0]$ a $[0, -1]$.



Sestavíme určitý integrál a počítáme. MUSÍME HO ROZDĚLIT NA DVA, OBLAST POD OSOU BY VYŠLA ZÁPORNĚ. Použijeme u prvního integrálu absolutní hodnotu:

$$S = \left| \int_{-2}^{1} x^3 - 1 \, \mathrm{d}x \right| + \int_{1}^{2} x^3 - 1 \, \mathrm{d}x = \left| \left[\frac{x^4}{4} - x \right]_{-2}^{1} \right| + \left[\frac{x^4}{4} - x \right]_{1}^{2} =$$

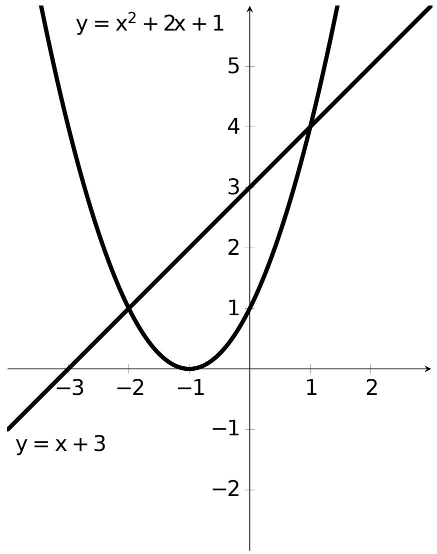
$$= \left| \left(\frac{1^4}{4} - 1 \right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - (-2) \right) \right| + \left(\frac{2^4}{4} - 2 \right) - \left(\frac{1^4}{4} - 1 \right) = \left| \left(\frac{1}{4} - 1 \right) - (4 + 2) \right| + (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - 1 \right) =$$

$$= \left| -\frac{27}{4} \right| + 2 - \frac{1}{4} + 1 = \frac{27}{4} + \frac{11}{4} = \frac{38}{4} = \underline{\underline{\frac{19}{2} j^2}}$$

Úlohy 2.

1. Určete obsah oblasti ohraničené křivkami $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$.

Řešení. Nakreslíme grafy funkcí a vidíme oblast, jejíž obsah budeme počítat. Jde o parabolu $y = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ s průsečíky s osami $[-1, 0]$ a $[0, 1]$ a vrcholem v bodě $[-1, 0]$ a lineární funkci $y = x + 3$.



Abychom mohli sestavit určitý integrál, musíme nejdříve vypočítat meze, což jsou průsečíky obou funkcí - dva body. Stačí nám x-ové souřadnice. Tedy:

$$x^2 + 2x + 1 = x + 3$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$(x - 1) \cdot (x + 2) = 0 \qquad x = 1, x = -2$$

Sestavíme určitý integrál a počítáme:

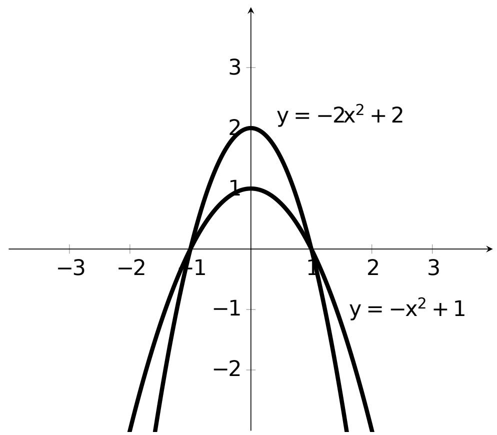
$$S = \int_{-2}^{1} (x + 3) - (x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} -x^2 - x + 2\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1\right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2)\right) = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) = 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{9}{2}j^2}}$$

Úlohy 3.

1. Určete objem tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $y = -x^2 + 1$, $y = -2x^2 + 2$ kolem osy x.

Řešení. Nakreslíme grafy funkcí a vidíme oblast, kterou budeme rotovat kolem osy x, čímž vznikne těleso, jehož objem budeme počítat. Jde o dvě paraboly otočené směrem dolů. $y = -x^2 + 1$ s průsečíky s osami $[-1, 0], [1, 0]$ a $[0, 1]$ a vrcholem v bodě $[1, 0]$ a $y = -2x^2 + 2$ s průsečíky s osami $[-1, 0], [1, 0]$ a $[0, 2]$ a vrcholem v bodě $[2, 0]$.



Abychom mohli sestavit určitý integrál, musíme nejdříve vypočítat meze, což jsou průsečíky obou funkcí - dva body. Stačí nám x-ové souřadnice. (Přestože společnými body jsou jejich průsečíky s osou x, ukážeme si i výpočet.) Tedy:

$$-x^2 + 1 = -2x^2 + 2$$
$$x^2 - 1 = 0$$
$$(x-1)\cdot(x+1) = 0 \qquad x = -1, x = 1$$

Sestavíme určitý integrál a počítáme:

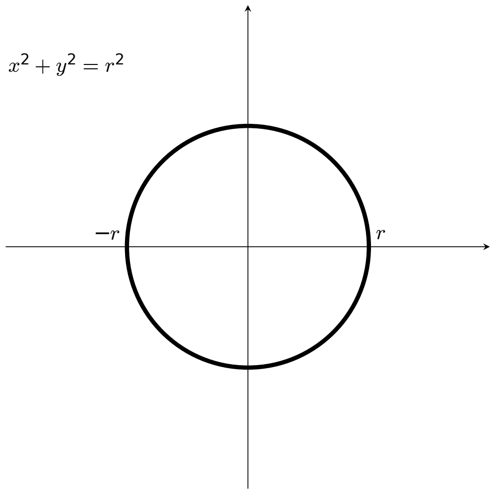
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^1 \left[-2x^2+2\right]^2 - \left[-x^2+1\right]^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^1 \left[2-2x^2\right]^2 - \left[1-x^2\right]^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^1 \left[4-8x^2+4x^4\right] - \left[1-2x^2+x^4\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \int_{-1}^1 3x^4 - 6x^2 + 3 \, \mathrm{d}x = \pi \left[3\cdot\frac{x^5}{5} - 6\cdot\frac{x^3}{3} + 3x\right]_{-1}^1 = \pi \left[\left(3\cdot\frac{1^5}{5} - 6\cdot\frac{1^3}{3} + 3\cdot 1\right) - \left(3\cdot\frac{(-1)^5}{5} - 6\cdot\frac{(-1)^3}{3} + 3\cdot(-1)\right)\right] = \underline{\underline{\pi\frac{16}{5} j^3}}$$

Úlohy 4.

1. Odvoďte vzorec pro objem koule.

Řešení. Potřebujeme funkci, kterou budeme rotovat kolem osy x a získáme tím kouli. Z analytické geometrie známe rovnici kružnice (jedna z kuželoseček) $x^2 + y^2 = r^2$, kde r je poloměr kružnice.



Vyjádříme si z ní y:

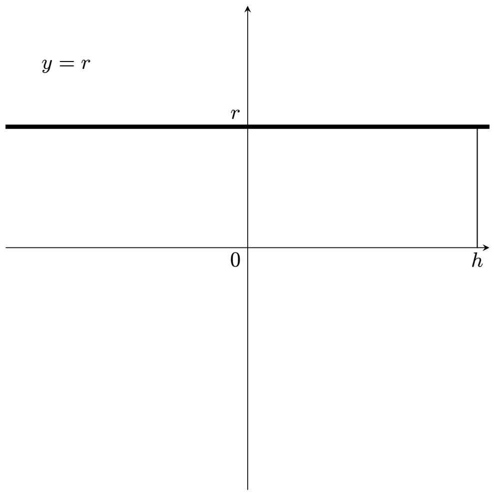
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ y^2 &= r^2 - x^2 \\ y &= \pm\sqrt{r^2 - x^2} \end{aligned}$$

Získali jsme dvě funkce, dva předpisy funkcí - dvě půlkružnice - nad/pod osou x. Použijeme jednu z nich, např. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, kde r je konstanta, sestavíme určitý integrál a počítáme:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} \left[\sqrt{r^2 - x^2}\right]^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, \mathrm{d}x = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} =$$

$$= \pi \left[\left(r^2 \cdot r - \frac{r^3}{3}\right) - \left(r^2 \cdot (-r) - \frac{(-r)^3}{3}\right)\right] = \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right] = \pi \frac{4r^3}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi r^3}}$$

2. Odvoďte vzorec pro objem válce.
Řešení. Potřebujeme funkci, kterou budeme rotovat kolem osy x a získáme tím válec. Tou je konstantní funkce $y = r$, kde r je konstanta. Když se omezíme na interval $x \in \langle 0, h \rangle$, při rotaci získáme válec s poloměrem podstavy r a výškou h.



Sestavíme určitý integrál a počítáme:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^h [r]^2 \, \mathrm{d}x = \pi \left[r^2 x\right]_0^h = \pi \left[\left(r^2 h\right) - \left(r^2 \cdot 0\right)\right] = \underline{\underline{\pi r^2 h}}$$