MENDELU Agronomická fakulta

Mendelova univerzita v Brně

MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

MATM – MATEMATIKA

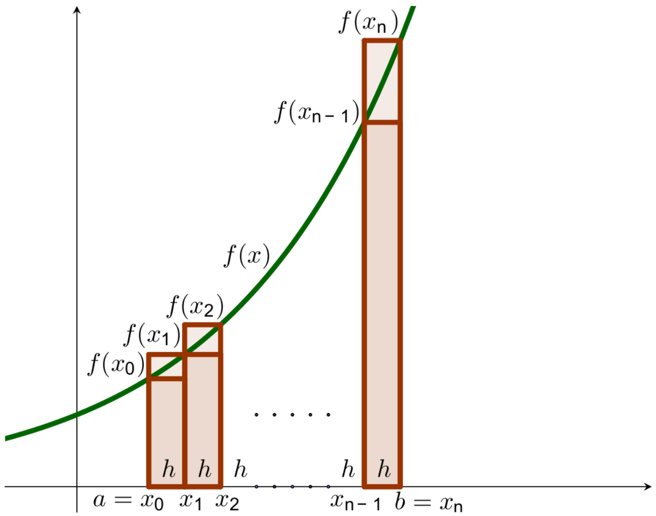
URČITÝ INTEGRÁL A JEHO APLIKACE

Mgr. Radka SMÝKALOVÁ, Ph.D.

radka.smykalova@mendelu.cz

Určitý integrál

Nechť je $f(x)$ spojitá rostoucí funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nabývá zde kladných hodnot. Graf této funkce, osa x a přímky $x = a$, $x = b$ ohraničují rovinný obrazec. Rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ na n dílků, pro jednoduchost stejné délky h. Určíme funkční hodnoty v krajních bodech jednotlivých intervalů a vytvoříme součty:



$$\boxed{s_n = f(x_0)\cdot h + f(x_1)\cdot h + f(x_2)\cdot h + \cdots + f(x_{n-1})\cdot h}$$

$$\boxed{S_n = f(x_1)\cdot h + f(x_2)\cdot h + f(x_3)\cdot h + \cdots + f(x_n)\cdot h}$$

$s_n \ldots$ nazveme **dolní součet** funkce $f(x)$ při dělení h.
$S_n \ldots$ nazveme **horní součet** funkce $f(x)$ při dělení h.

Čísla s_n a S_n představují součet obsahů obdélníků o základnách délky h a výškách daných hodnotami funkce $f(x)$ v krajních bodech intervalů. Zřejmě platí

$$s_n \leq S_n.$$

Budeme-li *zvyšovat* počet dělících bodů n, budou se čísla s_n a S_n k sobě přibližovat. Jestliže $n \to \infty$, existují limity

$$\lim_{n\to\infty} s_n \text{ a } \lim_{n\to\infty} S_n$$

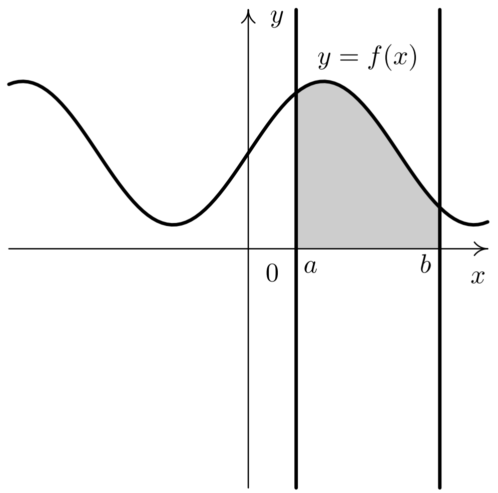
a jejich hodnoty jsou si *rovny*.

(K existenci a rovnosti limit stačí, aby funkce $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ byla *spojitá*.)

DEFINICE (Riemannův určitý integrál).

Nechť je $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Společnou hodnotu popsaných limit nazýváme **Riemannův určitý integrál** funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ a značíme ho

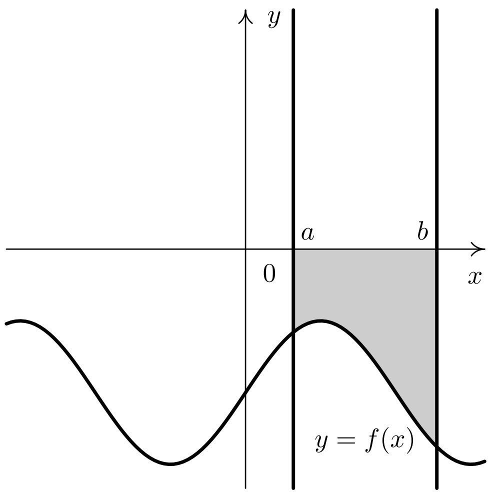
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Jestliže je $f(x) \geq 0$ na $\langle a, b\rangle$, vyjadřuje určitý integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

obsah plochy omezené křivkou $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$.



Jestliže je $f(x) \leq 0$ na $\langle a, b\rangle$, pak je **obsah plochy** omezené křivkou $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ roven

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right|.$$

Výpočet určitého integrálu

VĚTA (Newton-Leibnizova).

Je-li $F(x)$ primitivní funkce ke spojité funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Číslo a nazýváme dolní integrační mez, číslo b horní integrační mez.

Příklad.

$\int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x$

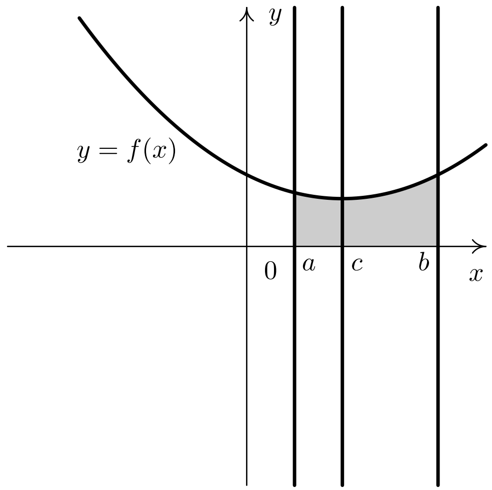
Řešení.

$$\int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = (-(-1)) - (-1) = \underline{\underline{2}}$$

Vlastnosti určitého integrálu

$f(x), g(x)$ jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Pak

- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $c \in \langle a, b\rangle$



Metody výpočtu určitého integrálu

VĚTA (Metoda per partes pro určitý integrál).
Nechť mají funkce $u(x)$ a $v(x)$ spojité derivace na $\langle a, b\rangle$. Pak platí

$$\int_a^b u \cdot v' \,\mathrm{d}x = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v \,\mathrm{d}x.$$

VĚTA (1. substituční metoda pro určitý integrál).
Nechť je funkce $f(t)$ spojitá na $\langle a, b\rangle$ a funkce $\varphi(x)$ má na $\langle \alpha, \beta\rangle$ spojitou derivaci. Dále předpokládejme, že $a \leq \varphi(x) \leq b$ pro $x \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Pak

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(x)]\varphi'(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) \,\mathrm{d}t.$$

U substituce musíme přepočítat meze!!!

Příklad. (per partes)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \,\mathrm{d}x$

Řešení.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \,\mathrm{d}x = [x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x \cdot 1 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2}\right) - (-0 \cdot \cos 0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x =$$

$$= (0) - (0) + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\sin\frac{\pi}{2}\right) - (\sin 0) = \underline{\underline{1}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \underline{x} & v = -\cos x \\ u' = 1 & v' = \underline{\sin x} \end{array}}$$

Příklad. (substituce)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x$

Řešení.

$$\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x = \int_{t=0}^{t=1} t^2 \cos x \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\cos x} = \int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 =$$

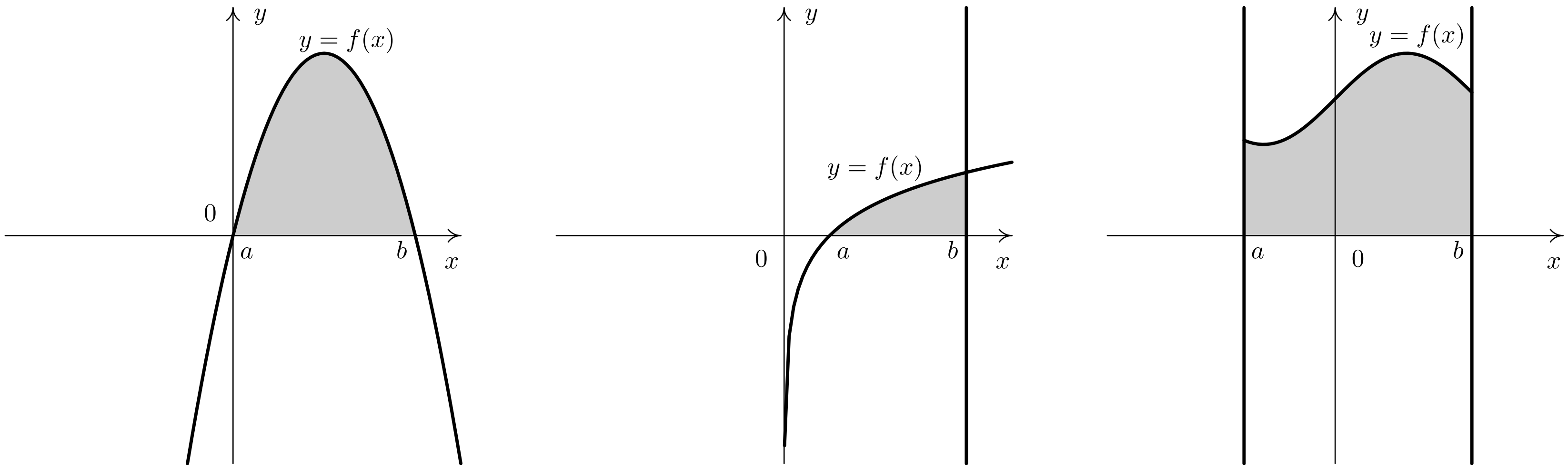
$$= \left(\frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^3}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= \sin x \\ 1 \cdot \mathrm{d}t &= \cos x \cdot \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}t}{\cos x} \\ x &= 0 \quad \Rightarrow \quad t = \sin 0 = 0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned}}$$

Aplikace určitého integrálu

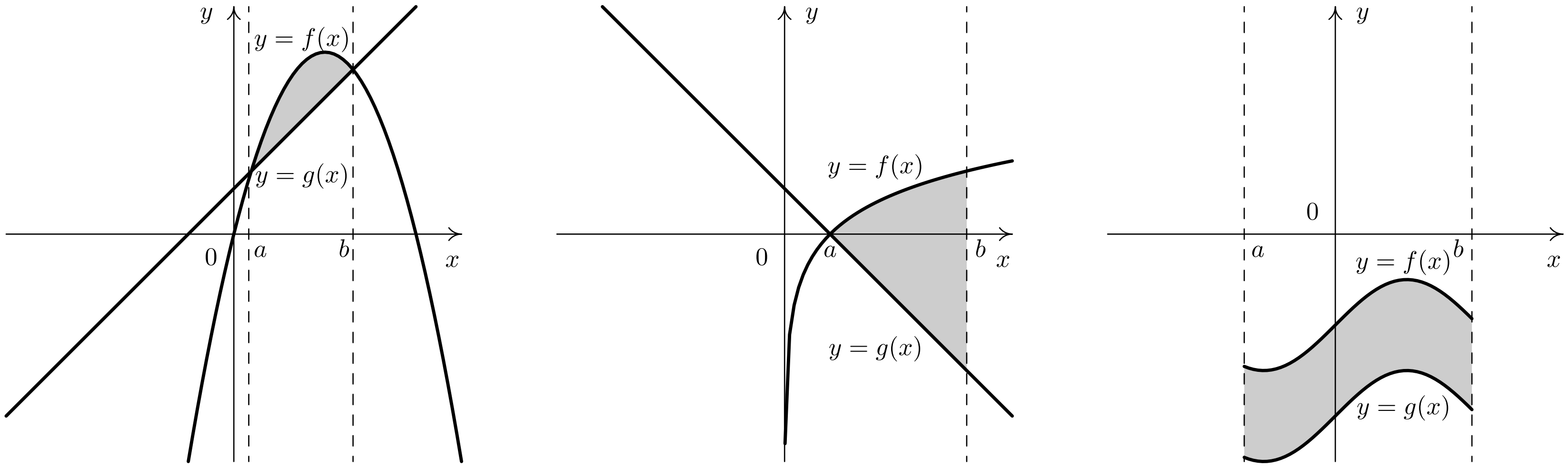
- OBSAH ROVINNÉ PLOCHY

  $*$ obsah plochy ohraničené křivkou $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a, x = b$



$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

$*$ obsah plochy ohraničené dvěma křivkami $y = f(x)$ a $y = g(x)$, kde $f(x) \geq g(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$



$$\boxed{S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x}$$

• OBJEM TĚLESA

∗ objem tělesa, které vznikne rotací rovinné plochy ohraničené křivkou $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a, x = b$, kolem osy x

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x}$$

∗ objem tělesa, které vznikne rotací rovinné plochy ohraničené dvěma křivkami $y = f(x)$ a $y = g(x)$ kolem osy x, kde $f(x) \geq g(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \, \mathrm{d}x}$$

Úlohy 1.

1. Určete obsah oblasti ohraničené parabolou $y = -x^2 + 2x + 3$ a osou x.

2. Určete obsah oblasti ohraničené funkcí $y = x^3 - 1$ a osou x, $x \in \langle -2, 2 \rangle$.

Úlohy 2.

1. Určete obsah oblasti ohraničené křivkami $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$.

Úlohy 3.

1. Určete objem tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $y = -x^2 + 1$, $y = -2x^2 + 2$ kolem osy x.

Úlohy 4.

1. Odvoďte vzorec pro objem koule.

2. Odvoďte vzorec pro objem válce.