

● MENDELU  
● Agronomická  
● fakulta  
●

● Mendelova  
● univerzita  
● v Brně  
●

● MENDELU  
● Lesnická  
● a dřevařská  
● fakulta

MATM – MATEMATIKA

NEURČITÝ INTEGRÁL - PER PARTES A SUBSTITUCE

## Metoda výpočtu integrálu - Metoda „per partes“ (po částech)

VĚTA (Metoda „per partes“).

Nechť mají funkce  $u(x)$  a  $v(x)$  spojité derivace na intervalu. Pak na tomto intervalu platí

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx.$$

Abychom mohli použít metodu per partes, potřebujeme  $\int$  **součin**  $dx$ .

**Ne každý součin** integrujeme pomocí metody per partes!!!

Je potřeba si nachystat následující schéma a správně se rozhodnout, co bude  $u$  a co bude  $v'$ :

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx = \dots$$

$$\begin{array}{l} u = \underline{\hspace{2cm}} \quad v = \\ u' = \quad \quad \quad v' = \underline{\hspace{2cm}} \end{array}$$

Příklad.

$$\int x \sin x \, dx$$

**Řešení.**

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= x(-\cos x) - \int -\cos x \cdot 1 \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = \\ &= \underline{\underline{-x \cos x + \sin x + c}} \end{aligned}$$

$u = \underline{x}$	$v = -\cos x$
$u' = 1$	$v' = \underline{\sin x}$

Úlohy 1.

1.  $\int x \cos x \, dx$    2.  $\int x e^x \, dx$    3.  $\int x^2 \sin x \, dx$    4.  $\int x^2 \cos x \, dx$    5.  $\int x^2 e^x \, dx$   
6.  $\int \ln x \, dx$    7.  $\int \operatorname{arctg} x \, dx$    8.  $\int x \ln x \, dx$

## Metoda výpočtu integrálu - Metoda substituce (nahrazení)

VĚTA (1. substituční metoda).

Nechť je funkce  $f(t)$  spojitá na otevřeném intervalu  $I$  a funkce  $\varphi(x)$  má na otevřeném intervalu  $J$  spojitou derivaci, přičemž pro libovolné  $x \in J$  je  $\varphi(x) \in I$ . Pak je funkce  $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$  spojitá na  $J$  a na tomto intervalu platí

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \int f(t) dt,$$

dosadíme-li do výrazu vpravo  $t = \varphi(x)$ .

Pokud je příklad na metodu substituce, je potřeba si zvolit, jaká část funkce bude nahrazena.

Typické příklady na substituci jsou

- goniometrické - většinou volíme  $t = \sin x$  nebo  $t = \cos x$
- s odmocninou - většinou volíme  $t =$  odmocnina
- složené funkce - většinou volíme  $t =$  vnitřní složka složené funkce

Příklad.

1.  $\int \sin^2 x \cos x \, dx$

**Řešení.**

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int t^2 \cos x \cdot \frac{dt}{\cos x} = \int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} + c = \underline{\underline{\frac{\sin^3 x}{3} + c}}$$

$$t = \sin x$$

$$1 \cdot dt = \cos x \cdot dx$$

$$dx = \frac{dt}{\cos x}$$

$$2. \int \frac{5}{\sqrt{4x-7}+3} dx$$

Řešení.

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{\sqrt{4x-7}+3} dx &= \int \frac{5}{t+3} \cdot \frac{t dt}{2} = \frac{5}{2} \int \frac{t}{t+3} dt = \text{dělíme } (t) : (t+3) = \\ &= \frac{5}{2} \int 1 - \frac{3}{t+3} dt = \frac{5}{2} \left( \int 1 dt - 3 \int \frac{1}{t+3} dt \right) = \\ &= \frac{5}{2} (t - 3 \ln |t+3|) + c = \frac{5t}{2} - \frac{15}{2} \ln |t+3| + c = \\ &= \frac{5\sqrt{4x-7}}{2} - \frac{15}{2} \ln |\sqrt{4x-7}+3| + c \end{aligned}$$

$t = \sqrt{4x-7}$
$t^2 = 4x - 7$
$2t \cdot dt = 4 \cdot dx$
$dx = \frac{2t dt}{4} = \frac{t dt}{2}$

$$3. \int x e^{x^2-8} dx$$

Řešení.

$$\int x e^{x^2-8} dx = \int x e^t \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + c = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{x^2-8} + c}}$$

$$\begin{array}{l} t = x^2 - 8 \\ 1 \cdot dt = 2x \cdot dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array}$$

$$4. \int x \sin x^2 dx$$

Řešení.

$$\begin{aligned} \int x \sin x^2 dx &= \int x \sin t \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int \sin t dt = \frac{1}{2}(-\cos t) + c = \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{2} \cos x^2 + c}} \end{aligned}$$

$\begin{aligned} t &= x^2 \\ 1 \cdot dt &= 2x \cdot dx \\ dx &= \frac{dt}{2x} \end{aligned}$
--

Úlohy 2.

$$1. \int \frac{\sin^3 x}{\cos x+3} dx \quad 2. \int \frac{2x}{\sqrt{x+16}-4} dx \quad 3. \int x^2(x^3+7)^{12} dx \quad 4. \int 3x \cos(x^2-6) dx$$