

● MENDELU
● Agronomická
● fakulta
●

● Mendelova
● univerzita
● v Brně
●

● MENDELU
● Lesnická
● a dřevařská
● fakulta

MATM – MATEMATIKA

NEURČITÝ INTEGRÁL

Primitivní funkce, neurčitý integrál

DEFINICE (Primitivní funkce).

Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou funkce definované na otevřeném intervalu I . Funkce $F(x)$ se nazývá *primitivní funkce* k funkci $f(x)$ na intervalu I , jestliže

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro každé } x \in I.$$

Příklad. Najděte primitivní funkci $F(x)$ k funkci $f(x) = 3x^2$.

Řešení. Pro primitivní funkci $F(x)$ musí platit $F'(x) = f(x)$. Tedy např.

$$(x^3)' = 3x^2, \quad (x^3 + 6)' = 3x^2, \quad (x^3 + 2023)' = 3x^2, \quad \dots$$

Všechny primitivní funkce k funkci $f(x)$ jsou tedy tvaru

$$F(x) = x^3 + c, \quad \text{kde } c \text{ je konstanta.}$$

DEFINICE (Neurčitý integrál).

Množinu všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ značíme $\int f(x) dx$ a nazýváme *neurčitý integrál*. Platí tedy

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

kde $F(x)$ je libovolná primitivní funkce k funkci $f(x)$ a c je libovolná konstanta.

$f(x)$... integrovaná funkce (integrand), $F(x)$... primitivní funkce,
 $\int dx$... integrační znak, c ... integrační konstanta.

Proces nalezení primitivní funkce k dané funkci $f(x)$ nazýváme *integrování*.

VĚTA (Vztah mezi spojitostí funkce $f(x)$ a primitivní funkcí k $f(x)$).

Je-li funkce $f(x)$ *spojitá* na intervalu, pak k ní existuje *primitivní funkce* na tomto intervalu.

Pravidla pro integrování

$f(x), g(x)$ jsou funkce, $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Pak platí

$$P1 \quad \int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

$$P2 \quad \int c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int f(x) \, dx$$

Nejsou žádná pravidla na součin, podíl ani na složenou funkci!!!

Vzorce pro integrování

$c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Pak platí

$$V1 \quad \int 1 \, dx = x + c$$

$$V7 \quad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$V2 \quad \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$V8 \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + c$$

$$V3 \quad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$$

$$V9 \quad \int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c$$

$$V4 \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$V10 \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c$$

$$V5 \quad \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$V11 \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$V6 \quad \int e^x \, dx = e^x + c$$

$c, A, B \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, $A > 0$. Pak platí

$$V12 \quad \int \frac{1}{A^2 + x^2} dx = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A} + c$$

$$V13 \quad \int \frac{1}{A^2 - x^2} dx = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{A+x}{A-x} \right| + c$$

$$V14 \quad \int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{A} + c$$

$$V15 \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm B} \right| + c$$

Metody výpočtu integrálu

- Přímá integrace
- Pomocí úprav integrandu
- Metoda „per partes“ (po částech)
- Metoda substituce (nahrazení)

Úlohy na vzorec V2.

$$1. \int x^3 dx \quad 2. \int \sqrt{x} dx \quad 3. \int \frac{1}{x^5} dx \quad 4. \int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} dx \quad 5. \int x dx \quad 6. \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Úlohy na vzorec V7.

$$1. \int 6^x dx \quad 2. \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx \quad 3. \int 12^x dx$$

Úlohy na vzorec V8.

$$1. \int \frac{2x}{x^2-1} dx \quad 2. \int \frac{x}{x^2+5} dx \quad 3. \int \frac{2x^2}{x^3+2} dx \quad 4. \int \frac{x^4}{1-x^5} dx \quad 5. \int \frac{e^x}{e^x-1} dx$$
$$6. \int \frac{\sin x}{4-\cos x} dx \quad 7. \int \frac{1}{3x-7} dx \quad 8. \int \operatorname{tg} x dx \quad 9. \int \operatorname{cotg} x dx$$

Úlohy na vzorec V9.

V9 je vždy nakombinovaný s dalším vzorcem!!!

$$1. \int e^{2x+6} dx \quad 2. \int e^{3x} dx \quad 3. \int e^{-x} dx \quad 4. \int \sin(6x-8) dx \quad 5. \int \cos 2x dx$$
$$6. \int \sqrt{5x-1} dx \quad 7. \int \frac{1}{(6x+5)^8} dx \quad 8. \int \frac{1}{\sqrt[3]{2x+1}} dx \quad 9. \int (7x-3)^4 dx$$

$$10. \int \frac{1}{\cos^2 4x} dx \quad 11. \int \frac{1}{\sin^2(3x-12)} dx$$

Úlohy na vzorce **V12** - **V15**.

$$1. \int \frac{1}{x^2+4} dx \quad 2. \int \frac{1}{9-x^2} dx \quad 3. \int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} dx \quad 4. \int \frac{1}{\sqrt{x^2+25}} dx$$

Úlohy na pravidlo **P1**.

$$1. \int x^9 + 9^x - 1 dx \quad 2. \int \sin x - \cos x dx$$

Úlohy na pravidlo **P2**.

$$1. \int 5x^3 dx \quad 2. \int 2 \cos x dx$$

Úlohy na pravidla **P1** - **P2**.

$$1. \int 5 \sin x - \frac{13}{16+x^2} dx \quad 2. \int \frac{5}{\sin^2 x} + \frac{4}{x} dx \quad 3. \int 3x^3 - \frac{2}{\sqrt[5]{8x-3}} dx$$

Metoda výpočtu integrálu - Pomocí úprav integrandu

★ \int (Racionální lomená funkce **neryze lomená**) dx - nejdříve dělíme čítec jmenovatelem a pak integrujeme.

\int (Racionální lomená funkce **ryze lomená**) dx - hned integrujeme.

★ \int (Goniometrická funkce) dx - při úpravách využíváme vzorce

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

★ Doplnění na čtverec.

Příklad. $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$

Řešení.

$$\int \frac{1}{\underline{x^2+2x+5}} dx = \int \frac{1}{\underline{(x+1)^2-1+5}} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx \stackrel{V9+V12}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c$$

$$x^2+2x+\square = (\square+\square)^2 \Rightarrow x^2+2x+1 = (x+1)^2 \Rightarrow \underline{x^2+2x} = (x+1)^2-1$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

★ Jakákoliv jiná úprava.

Úlohy 1.

1. $\int (9x^2 - 8x + 7) dx$ 2. $\int (3\sqrt[4]{x^3} + 2 \sin x) dx$ 3. $\int (2 - x)x^3 dx$
4. $\int \sqrt{x} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$ 5. $\int \frac{x^2 - 4x + 5}{\sqrt{x}} dx$ 6. $\int \frac{(x+3)^2}{x} dx$ 7. $\int \frac{x}{5-3x^2} dx$
8. $\int \frac{3x + \sqrt[3]{x}}{x^2} dx$ 9. $\int \frac{x}{x^2-3} dx$ 10. $\int \frac{x}{x+2} dx$ 11. $\int \frac{x^2}{x+3} dx$ 12. $\int \frac{x^3-2}{x^2} dx$
13. $\int \frac{x^2+4x+5}{x-1} dx$ 14. $\int \frac{3x^3+x}{x+1} dx$ 15. $\int \frac{6x^2}{x^3-1} dx$ 16. $\int \frac{4x^2+2x+1}{x-4} dx$
17. $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x) dx$ 18. $\int \frac{1}{\cos^2(4x+9)} dx$ 19. $\int \left(\frac{x}{x^2+5} - \frac{x^2+5}{x} \right) dx$
20. $\int \frac{3}{x^2+8x} dx$ 21. $\int \frac{1}{\sqrt{2+3x}} dx$ 22. $\int \operatorname{cotg}^2 x dx$ 23. $\int \frac{8}{\sqrt{x^2-4x+6}} dx$
24. $\int (2^{5x} - 2 \cos 6x) dx$