MATM – MATEMATIKA

LIMITA A SPOJITOST FUNKCE - ŘEŠENÍ ÚLOH

Mgr. Radka SMÝKALOVÁ, Ph.D.

radka.smykalova@mendelu.cz

Úlohy 1. (Limita spojité funkce)

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{x^2-2}$

Řešení. Víme, že při výpočtu limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$.
Víme, že je-li funkce $f(x)$ spojitá v x_0, pak dostaneme po dosazení bodu x_0 do funkce funkční hodnotu, která je zároveň limitou funkce v daném bodě. Tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{x^2-2}=\frac{1-0^2}{0^2-2}=\frac{1}{-2}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

2. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x^2\sin x$

Řešení. Víme, že při výpočtu limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$.
Víme, že je-li funkce $f(x)$ spojitá v x_0, pak dostaneme po dosazení bodu x_0 do funkce funkční hodnotu, která je zároveň limitou funkce v daném bodě. Tedy

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x^2\sin x=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}\cdot 1=\underline{\underline{\frac{\pi^2}{4}}}$$

3. $\lim_{x\to 1}(x+1)\ln x$

Řešení. Víme, že při výpočtu limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$.
Víme, že je-li funkce $f(x)$ spojitá v x_0, pak dostaneme po dosazení bodu x_0 do funkce funkční hodnotu, která je zároveň limitou funkce v daném bodě. Tedy

$$\lim_{x\to 1}(x+1)\ln x=(1+1)\cdot\ln 1=2\cdot 0=\underline{\underline{0}}$$

Úlohy 2. (Limita funkce, dostaneme-li po dosazení $\left\|\frac{a}{0}\right\|$, kde $a\in\mathbb{R}^*\setminus\{0\}$)

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$

Řešení. Víme, že při výpočtu limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\left\|\frac{1}{0}\right\|$$

Víme, že tyto limity počítáme pomocí *jednostranných limit*, které se musí rovnat. Tedy

- Limita *zleva*

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\left\|\frac{1}{0^-}\right\|=\left\|\frac{1}{-0,0000\ldots001}\right\|=-\infty$$

- Limita *zprava*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\left\|\frac{1}{0^+}\right\|=\left\|\frac{1}{0,0000\ldots001}\right\|=\infty$$

Víme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu, právě tehdy když obě jednostranné limity (zleva i zprava) jsou si rovny. Tedy $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje.

2. $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3}$
Řešení. Víme, že při výpočtu limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$.

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3} = \left\|\frac{1}{3-3}\right\| = \left\|\frac{1}{0}\right\|$$

Víme, že tyto limity počítáme pomocí *jednostranných limit*, které se musí rovnat. Tedy

- Limita *zleva*

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = \left\|\frac{1}{3^- - 3}\right\| = \left\|\frac{1}{2,9999\ldots 999-3}\right\| = \left\|\frac{1}{-0,0000\ldots 001}\right\| = -\infty$$

- Limita *zprava*

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = \left\|\frac{1}{3^+ - 3}\right\| = \left\|\frac{1}{3,0000\ldots 001-3}\right\| = \left\|\frac{1}{0,0000\ldots 001}\right\| = \infty$$

Víme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu, právě tehdy když obě jednostranné limity (zleva i zprava) jsou si rovny. Tedy $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3}$ $\underline{\underline{\text{neexistuje}}}$.

3. $\lim_{x\to -4} \frac{x+12}{x+4}$
Řešení. Víme, že při výpočtu limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$.

$$\lim_{x\to -4} \frac{x+12}{x+4} = \left\|\frac{-4+12}{-4+4}\right\| = \left\|\frac{8}{0}\right\|$$

Víme, že tyto limity počítáme pomocí *jednostranných limit*, které se musí rovnat. Tedy

- Limita *zleva*

$$\lim_{x\to -4^-} \frac{x+12}{x+4} = \text{ do čitatele dosadíme } -4, \text{ protože čitatel není problémový} = \left\|\frac{-4+12}{-4^- + 4}\right\| = \left\|\frac{8}{-4,0000\ldots 001+4}\right\| = \left\|\frac{8}{-0,0000\ldots 001}\right\| = -\infty$$

- Limita *zprava*

$$\lim_{x\to -4^+} \frac{x+12}{x+4} = \text{ do čitatele dosadíme } -4, \text{ protože čitatel není problémový} = \left\|\frac{-4+12}{-4^+ + 4}\right\| = \left\|\frac{8}{-3,9999\ldots 999+4}\right\| = \left\|\frac{8}{0,0000\ldots 001}\right\| = \infty$$

Víme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu, právě tehdy když obě jednostranné limity (zleva i zprava) jsou si rovny. Tedy $\lim_{x\to -4} \frac{x+12}{x+4}$ $\underline{\underline{\text{neexistuje}}}$.

4. $\lim_{x\to 5} \frac{6}{(x-5)^2}$

Řešení. Víme, že při výpočtu limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$.

$$\lim_{x\to 5} \frac{6}{(x-5)^2} = \left\| \frac{6}{(5-5)^2} \right\| = \left\| \frac{6}{0^2} \right\| = \left\| \frac{6}{0} \right\|$$

Víme, že tyto limity počítáme pomocí *jednostranných limit*, které se musí rovnat. Tedy

- Limita *zleva*
$$\lim_{x\to 5^-} \frac{6}{(x-5)^2} = \left\| \frac{6}{(5^- - 5)^2} \right\| = \left\| \frac{6}{(4,9999\ldots999-5)^2} \right\| = \left\| \frac{6}{(-0,0000\ldots001)^2} \right\| = \left\| \frac{6}{0,0000\ldots001} \right\| = \infty$$
- Limita *zprava*
$$\lim_{x\to 5^+} \frac{6}{(x-5)^2} = \left\| \frac{6}{(5^+ - 5)^2} \right\| = \left\| \frac{6}{(5,0000\ldots001-5)^2} \right\| = \left\| \frac{6}{(0,0000\ldots001)^2} \right\| = \left\| \frac{6}{0,0000\ldots001} \right\| = \infty$$

Víme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu, právě tehdy když obě jednostranné limity (zleva i zprava) jsou si rovny. Tedy $\lim_{x\to 5} \frac{6}{(x-5)^2} = \underline{\underline{\infty}}$.

5. $\lim_{x\to -6} \frac{-8}{(x+6)^3}$

Řešení. Víme, že při výpočtu limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$.

$$\lim_{x\to -6} \frac{-8}{(x+6)^3} = \left\| \frac{-8}{(-6+6)^3} \right\| = \left\| \frac{-8}{0^3} \right\| = \left\| \frac{-8}{0} \right\|$$

Víme, že tyto limity počítáme pomocí *jednostranných limit*, které se musí rovnat. Tedy

- Limita *zleva*
$$\lim_{x\to -6^-} \frac{-8}{(x+6)^3} = \left\| \frac{-8}{(-6^- + 6)^3} \right\| = \left\| \frac{-8}{(-6,0000\ldots001+6)^3} \right\| = \left\| \frac{-8}{(-0,0000\ldots001)^3} \right\| = \left\| \frac{-8}{-0,0000\ldots001} \right\| = \infty$$
- Limita *zprava*
$$\lim_{x\to -6^+} \frac{-8}{(x+6)^3} = \left\| \frac{-8}{(-6^+ + 6)^3} \right\| = \left\| \frac{-8}{(-5,9999\ldots999+6)^3} \right\| = \left\| \frac{-8}{(0,0000\ldots001)^3} \right\| = \left\| \frac{-8}{0,0000\ldots001} \right\| = -\infty$$

Víme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu, právě tehdy když obě jednostranné limity (zleva i zprava) jsou si rovny. Tedy $\lim_{x\to -6} \frac{-8}{(x+6)^3}$ <u>neexistuje</u>.

6. $\lim_{x\to 2}\frac{x+8}{2-x}$
Řešení. Víme, že při výpočtu limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+8}{2-x} = \left\|\frac{2+8}{2-2}\right\| = \left\|\frac{10}{0}\right\|$$

Víme, že tyto limity počítáme pomocí *jednostranných limit*, které se musí rovnat. Tedy

- Limita *zleva*

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x+8}{2-x} = \text{ do čitatele dosadíme 2, protože čitatel není problémový} = \left\|\frac{2+8}{2-2^-}\right\| = \left\|\frac{10}{2-1,9999\ldots 999}\right\| = \left\|\frac{10}{0,0000\ldots 001}\right\| = \infty$$

- Limita *zprava*

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x+8}{2-x} = \text{ do čitatele dosadíme 2, protože čitatel není problémový} = \left\|\frac{2+8}{2-2^+}\right\| = \left\|\frac{10}{2-2,0000\ldots 001}\right\| = \left\|\frac{10}{-0,0000\ldots 001}\right\| = -\infty$$

Víme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu, právě tehdy když obě jednostranné limity (zleva i zprava) jsou si rovny. Tedy $\lim_{x\to 2}\frac{x+8}{2-x}$ $\underline{\underline{\text{neexistuje}}}$.

7. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$
Řešení. Víme, že při výpočtu limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \left\|\frac{1}{0^2}\right\| = \left\|\frac{1}{0}\right\|$$

Víme, že tyto limity počítáme pomocí *jednostranných limit*, které se musí rovnat. Tedy

- Limita *zleva*

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2} = \left\|\frac{1}{(0^-)^2}\right\| = \left\|\frac{1}{(-0,0000\ldots 001)^2}\right\| = \left\|\frac{1}{0,0000\ldots 001}\right\| = \infty$$

- Limita *zprava*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2} = \left\|\frac{1}{(0^+)^2}\right\| = \left\|\frac{1}{(0,0000\ldots 001)^2}\right\| = \left\|\frac{1}{0,0000\ldots 001}\right\| = \infty$$

Víme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu, právě tehdy když obě jednostranné limity (zleva i zprava) jsou si rovny. Tedy $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \underline{\underline{\infty}}$.

8. $\lim_{x\to 6}\frac{6}{(6-x)^4}$
Řešení. Víme, že při výpočtu limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$.

$$\lim_{x\to 6}\frac{6}{(6-x)^4} = \left\|\frac{6}{(6-6)^4}\right\| = \left\|\frac{6}{0^4}\right\| = \left\|\frac{6}{0}\right\|$$

Víme, že tyto limity počítáme pomocí *jednostranných limit*, které se musí rovnat. Tedy

- Limita *zleva*
$$\lim_{x\to 6^-}\frac{6}{(6-x)^4} = \left\|\frac{6}{(6-6^-)^4}\right\| = \left\|\frac{6}{(6-5,9999\ldots999)^4}\right\| = \left\|\frac{6}{(0,0000\ldots001)^4}\right\| = \left\|\frac{6}{0,0000\ldots001}\right\| = \infty$$
- Limita *zprava*
$$\lim_{x\to 6^+}\frac{6}{(6-x)^4} = \left\|\frac{6}{(6-6^+)^4}\right\| = \left\|\frac{6}{(6-6,0000\ldots001)^4}\right\| = \left\|\frac{6}{(-0,0000\ldots001)^4}\right\| = \left\|\frac{6}{0,0000\ldots001}\right\| = \infty$$

Víme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu, právě tehdy když obě jednostranné limity (zleva i zprava) jsou si rovny. Tedy $\lim_{x\to 6}\frac{6}{(6-x)^4} = \underline{\underline{\infty}}$.

<u>*Úlohy 3*</u>. (Limita polynomu a racionální lomené funkce pro $x\to\pm\infty$)
1. $\lim_{x\to\infty}(x^3+5x-6)$
Řešení. Víme, že platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+5x-6) = \lim_{x\to\infty} x^3$$

Víme, že při výpočtu limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$. Tedy

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty^3 = \underline{\underline{\infty}}$$

2. $\lim_{x\to-\infty}(3x^2-x-5)$
Řešení. Víme, že platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n$$

Tedy

$$\lim_{x\to-\infty}(3x^2-x-5) = \lim_{x\to-\infty} 3x^2$$

Víme, že při výpočtu limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$. Tedy

$$\lim_{x\to-\infty} 3x^2 = 3\cdot(-\infty)^2 = 3\cdot\infty = \underline{\underline{\infty}}$$

3. $\lim_{x\to-\infty}(2x^5+1)$
Řešení. Víme, že platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n$$

Tedy

$$\lim_{x\to-\infty}(2x^5+1) = \lim_{x\to-\infty} 2x^5$$

Víme, že při výpočtu limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$. Tedy

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^5 = 2\cdot(-\infty)^5 = 2\cdot(-\infty) = \underline{\underline{-\infty}}$$

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x+1}{2x^3+x^2-x}$
Řešení. Víme, že platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x+1}{2x^3+x^2-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{2x^3} = \text{ čitatel a jmenovatel se zkrátí} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{2}$$

Víme, že při výpočtu limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$. Tedy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2} = \text{ není žádně } x, \text{není kam dosadit} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

5. $\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^3-x^2+2}{x^2+2x+7}$
Řešení. Víme, že platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}$$

Tedy

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^3-x^2+2}{x^2+2x+7} = \lim_{x\to-\infty}\frac{7x^3}{x^2} = \text{ čitatel a jmenovatel se zkrátí} = \lim_{x\to-\infty}\frac{7x}{1} = \lim_{x\to-\infty} 7x$$

Víme, že při výpočtu limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$. Tedy

$$\lim_{x\to-\infty} 7x = 7\cdot(-\infty) = \underline{\underline{-\infty}}$$

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-8}{3x^4+4x}$

Řešení. Víme, že platí

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-8}{3x^4+4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{3x^4} = \text{ čitatel a jmenovatel se zkrátí } = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x^2}$$

Víme, že při výpočtu limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$. Tedy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3\cdot(\infty)^2} = \frac{1}{3\cdot\infty} = \frac{1}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

<u>*Úlohy 4*</u>. (Limita složené funkce)

1. $\lim_{x\to\infty} \sin(\operatorname{arctg} x)$

Řešení. Víme, že při výpočtu limity složené funkce $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$ postupujeme tak, že nejdříve určíme limitu vnitřní složky. Svými slovy řečeno - vnoříme se limitou až k vnitřní složce, tedy $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$.

$$\lim_{x\to\infty} \sin(\operatorname{arctg} x) = \sin\left(\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x\right) = \text{ vypočítáme nejdříve limitu v závorce (tedy dosadíme) } = \sin\left(\operatorname{arctg}\infty\right) = \sin\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{1}}$$

2. $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{5x^2+1}{x^2-8}}$

Řešení. Víme, že při výpočtu limity složené funkce $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$ postupujeme tak, že nejdříve určíme limitu vnitřní složky. Svými slovy řečeno - vnoříme se limitou až k vnitřní složce, tedy $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$.

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{5x^2+1}{x^2-8}} = \mathrm{e}^{\left(\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+1}{x^2-8}\right)} =$$

$$\text{vypočítáme nejdříve limitu v závorce (je to typ - Limita polynomu a racionální lomené funkce pro } x\to\pm\infty \text{ viz Úlohy 3) } =$$

$$= \mathrm{e}^{\left(\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{x^2}\right)} = \mathrm{e}^{\left(\lim_{x\to\infty} 5\right)} = \underline{\underline{\mathrm{e}^5}}$$

3. $\lim_{x\to 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$

Řešení. Víme, že při výpočtu limity složené funkce $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$ postupujeme tak, že nejdříve určíme limitu vnitřní složky.

Svými slovy řečeno - vnoříme se limitou až k vnitřní složce, tedy $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$.

$$\lim_{x\to 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x} = \operatorname{arctg}\left(\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x}\right) =$$

vypočítáme nejdříve limitu v závorce (je to typ - Limita funkce, dostaneme-li po dosazení $\left\|\frac{a}{0}\right\|$, kde $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ viz Úlohy 2) =

$$= \operatorname{arctg}\left(\left\|\frac{1}{0}\right\|\right) =$$

víme, že tuto limitu v závorce počítáme pomocí *jednostranných limit*, které se musí rovnat. Tedy

- Limita *zleva*
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = \left\|\frac{1}{1-1^-}\right\| = \left\|\frac{1}{1-0,9999\ldots999}\right\| = \left\|\frac{1}{0,0000\ldots001}\right\| = \infty$$
- Limita *zprava*
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} = \left\|\frac{1}{1-1^+}\right\| = \left\|\frac{1}{1-1,0000\ldots001}\right\| = \left\|\frac{1}{-0,0000\ldots001}\right\| = -\infty$$

Víme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu, právě tehdy když obě jednostranné limity (zleva i zprava) jsou si rovny. Tedy $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x}$ neexistuje.
Víme, že když limita vnitřní složky neexistuje, potom neexistuje ani původní limita složené funkce ze zadání, kterou jsme počítali. Tedy $\lim_{x\to 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$ neexistuje.