MENDELU
Agronomická
fakulta

Mendelova
univerzita
v Brně

MENDELU
Lesnická
a dřevařská
fakulta

MATM – MATEMATIKA

LIMITA A SPOJITOST FUNKCE

Mgr. Radka SMÝKALOVÁ, Ph.D. radka.smykalova@mendelu.cz

Okolí bodu x_0, ryzí okolí bodu x_0

Nechť $x_0, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

- $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ - δ *okolí* bodu x_0
- $(x_0 - \delta, x_0\rangle$ - *levé* δ *okolí* bodu x_0
- $\langle x_0, x_0 + \delta)$ - *pravé* δ *okolí* bodu x_0
- $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ - *ryzí* δ *okolí* bodu x_0
- $(x_0 - \delta, x_0)$ - *levé ryzí* δ *okolí* bodu x_0
- $(x_0, x_0 + \delta)$ - *pravé ryzí* δ *okolí* bodu x_0

Nevlastní body

Prvky $-\infty$ a ∞ se nazývají *nevlastní body*. Prvky množiny $\mathbb{R}$ nazýváme *vlastní body*.

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ - rozšířená množina reálných čísel

Pro $a \in \mathbb{R}$ a body $-\infty, \infty$ platí:

$$a + \infty = \infty \qquad \infty \cdot \infty = \infty = (-\infty) \cdot (-\infty)$$

$$a - \infty = -\infty \qquad \infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\infty + \infty = \infty \qquad \frac{a}{\infty} = 0 = \frac{a}{-\infty}$$

$$-\infty - \infty = -\infty \qquad |\pm\infty| = \infty$$

Pro $a > 0$:

$$a \cdot \infty = \infty, \qquad a \cdot (-\infty) = -\infty$$

Pro $a < 0$:

$$a \cdot \infty = -\infty, \qquad a \cdot (-\infty) = \infty$$

Neurčité výrazy - nejsou definovány:

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \pm\infty \cdot 0, \qquad \infty - \infty$$

Definice limity

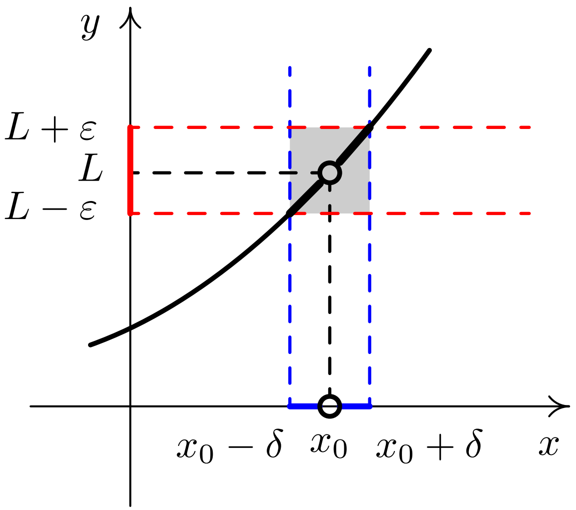
DEFINICE (Limita funkce). Funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 limitu L, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x z ryzího δ okolí bodu x_0 platí

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Zápis:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Čteme: Limita funkce $f(x)$ pro x jdoucí k bodu x_0 je L.



DEFINICE (Limita funkce zleva (jednostranná limita)). Stejná definice jako definice limity funkce, jen *ryzí* δ *okolí* bodu x_0 nahradíme *levým ryzím* δ *okolím* bodu x_0.

Zápis: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$

Čteme: Limita funkce $f(x)$ pro x jdoucí k bodu x_0 *zleva* je L.

DEFINICE (Limita funkce zprava (jednostranná limita)). Stejná definice jako definice limity funkce, jen *ryzí* δ *okolí* bodu x_0 nahradíme *pravým ryzím* δ *okolím* bodu x_0.

Zápis: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$

Čteme: Limita funkce $f(x)$ pro x jdoucí k bodu x_0 *zprava* je L.

VĚTA (Kolik má funkce v bodě x_0 limit).
Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *jednu* nebo *žádnou* limitu.

VĚTA (Kdy má funkce v bodě x_0 limitu). Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu, právě tehdy když obě jednostranné limity (zleva i zprava) jsou si rovny. A platí

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$

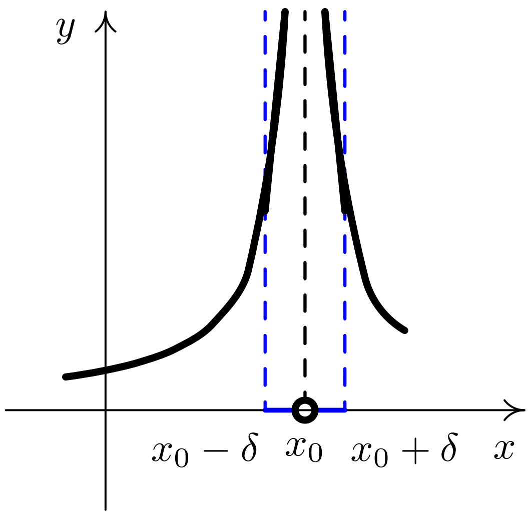
Limita funkce $f(x)$ neexistuje, když $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$.

Aby existovala limita funkce $f(x)$ v bodě x_0, *nemusí* být v tomto bodě definovaná. *Musí* však být definovaná v nějakém ryzím okolí tohoto bodu.

Nevlastní limita funkce

DEFINICE (Nevlastní limita, nevlastní limita zleva a zprava).

Funkce má nevlastní limitu v bodech $x_0, x_0^-, x_0^+ \in \mathbb{R}$, když $L = \infty$ nebo $L = -\infty$.



- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

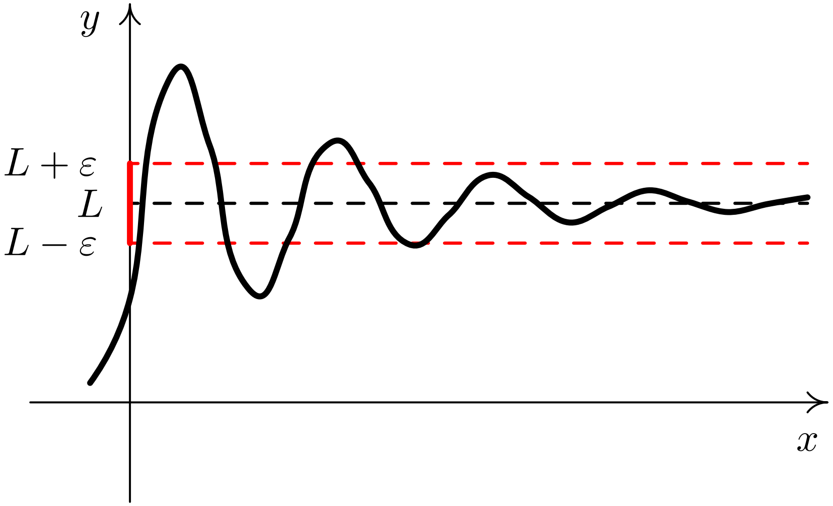
- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

Limita funkce v nevlastním bodě

DEFINICE (Limita v nevlastním bodě).

Funkce má limitu v nevlastním bodě, když $x_0 = \infty$ nebo $x_0 = -\infty$.

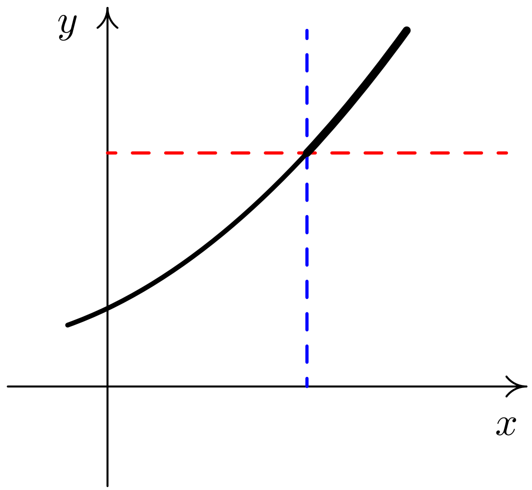


- $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

Nevlastní limita funkce v nevlastním bodě

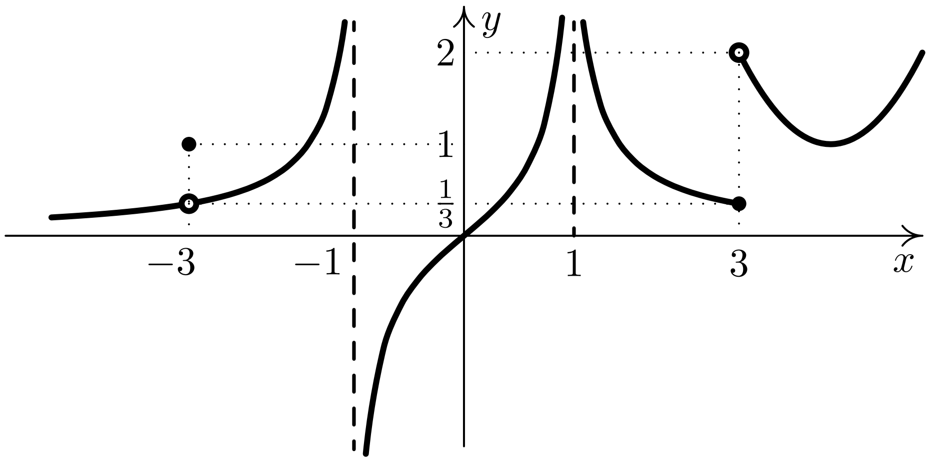
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$



Příklad.

Určete limity funkce zadané grafem v bodech $x_0 = -\infty, -3, -1, 0, 1, 3, \infty$:



- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to-3} f(x) = \frac{1}{3}$, $(f(-3) = 1)$
- $\lim_{x\to-1} f(x) =$ neexistuje
- $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \infty$
- $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to0} f(x) = 0$, $(f(0) = 0)$
- $\lim_{x\to1} f(x) = \infty$
- $\lim_{x\to3} f(x) =$ neexistuje, $(f(3) = \frac{1}{3})$
- $\lim_{x\to3^-} f(x) = \frac{1}{3}$, $\lim_{x\to3^+} f(x) = 2$
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Spojitost funkce

DEFINICE (Spojitost v bodě). Funkce $f(x)$ je *spojitá v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

(Limita funkce v bodě x_0 se rovná funkční hodnotě v bodě x_0.)
Funkce $f(x)$ je *spojitá v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$ *zleva (zprava)*, jestliže

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \; \left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \right).$$

DEFINICE (Spojitost na intervalu). Funkce $f(x)$ je *spojitá na intervalu*, jestliže je spojitá ve všech bodech tohoto intervalu.

VĚTA. Základní elementární funkce a funkce, které vznikly součtem, rozdílem, součinem, podílem a skládáním těchto funkcí jsou spojité ve *všech bodech svého definičního oboru.*

Body, v nichž funkce není spojitá, se nazývají *body nespojitosti*.

Body nespojitosti základních elementárních funkcí jsou body, v nichž tyto funkce nejsou definované. Například body nespojitosti funkce $y = \operatorname{tg} x$ jsou body $k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Body nespojitosti racionální lomené funkce jsou nulové body jmenovatele.

To, že je funkce spojitá ve všech bodech intervalu, odpovídá naší představě o tom, že grafem je *čára nakreslená plynulým nepřerušovaným tahem*.

Výpočet limit funkcí

VĚTA (Pravidla pro počítání limit). Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce, které mají limitu v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak platí

1. $$\lim_{x \to x_0} c = c$$
2. $$\lim_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$
3. $$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$
4. $$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$
5. $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}, \text{ kde } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

Při výpočtu limity $\lim_{x \to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že nejdříve dosadíme bod x_0 do funkce $f(x)$.

✠ Limita spojité funkce

Je-li funkce $f(x)$ spojitá v x_0, pak dostaneme po dosazení bodu x_0 do funkce funkční hodnotu, která je zároveň limitou funkce v daném bodě.

Úlohy 1.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-x^2}{x^2-2}$ **2.** $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} x^2 \sin x$ **3.** $\lim_{x\to 1}(x+1)\ln x$

✠ Limita některých funkcí, dostaneme-li po dosazení $\left\|\frac{0}{0}\right\|$

Funkce nejsou v x_0 definované, ovšem její úpravou - *krácením* - a opětovným dosazením limitu vypočítáme.

Příklad.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = \underline{\underline{4}}$$

✠ Limita funkce, dostaneme-li po dosazení $\left\|\frac{a}{0}\right\|$, kde $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$

Počítáme pomocí *jednostranných limit*, které se musí rovnat.

Úlohy 2.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ **2.** $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3}$ **3.** $\lim_{x\to -4} \frac{x+12}{x+4}$ **4.** $\lim_{x\to 5} \frac{6}{(x-5)^2}$
5. $\lim_{x\to -6} \frac{-8}{(x+6)^3}$ **6.** $\lim_{x\to 2} \frac{x+8}{2-x}$ **7.** $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ **8.** $\lim_{x\to 6} \frac{6}{(6-x)^4}$

✠ Limita polynomu a racionální lomené funkce pro $x \to \pm\infty$

VĚTA. Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}$$

Úlohy 3.

1. $\lim_{x\to\infty}(x^3+5x-6)$ **2.** $\lim_{x\to-\infty}(3x^2-x-5)$ **3.** $\lim_{x\to-\infty}(2x^5+1)$
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-2x+1}{2x^3+x^2-x}$ **5.** $\lim_{x\to-\infty} \frac{7x^3-x^2+2}{x^2+2x+7}$ **6.** $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-8}{3x^4+4x}$

✠ Limita základních elementárních funkcí pro $x \to \pm\infty$

Příklad.

1. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$ **2.** $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ **3.** $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

4. $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ **5.** $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ **6.** $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$

7. $\lim_{x\to\infty} \sin x =$ neexistuje **8.** $\lim_{x\to-\infty} \cos x =$ neexistuje

9. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ **10.** $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$

11. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$ **12.** $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$

✠ Limita složené funkce

Při výpočtu limity složené funkce

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))$$

postupujeme tak, že nejdříve určíme limitu vnitřní složky, tedy

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right).$$

Pokud

- limita funkce $f(x)$ neexistuje
- funkce $g(x)$ není v bodě $\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$ definovaná,

pak limita složené funkce *neexistuje*.

Úlohy 4.

1. $\lim_{x\to\infty} \sin(\operatorname{arctg} x)$ **2.** $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{5x^2+1}{x^2-8}}$ **3.** $\lim_{x\to 1} \operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}$

✠ Limita funkce, dostaneme-li po dosazení $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ nebo $\left\|\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right\|$

Počítáme pomocí *derivací*, viz následující kapitola.