MATM – MATEMATIKA

LAGRANGEŮV P., METODA N. ČTVERCŮ - ŘEŠENÍ ÚLOH

Mgr. Radka SMÝKALOVÁ, Ph.D. radka.smykalova@mendelu.cz

Úlohy 1.
Napište Lagrangeův interpolační polynom, který aproximuje funkci
1. $f(x) = \{[1, -1], [2, 0], [4, 1]\}$

Řešení. Funkce je dána 3 body, Lagrangeův polynom je stupně maximálně 2 a má tvar

$$L_2(x) = -1 \cdot l_0(x) + 0 \cdot l_1(x) + 1 \cdot l_2(x).$$

Nyní stačí sestavit a upravit koeficienty $l_k(x)$

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{x^2-6x+8}{3} \\ l_1(x) &= \text{nemusíme počítat} \\ l_2(x) &= \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{x^2-3x+2}{6} \end{aligned}$$

a následně do Lagrangeova polynomu dosadit

$$L_2(x) = -1 \cdot \frac{x^2-6x+8}{3} + 1 \cdot \frac{x^2-3x+2}{6} = \underline{\underline{-\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{3}}}$$

2. $f(x) = \{[1, 2], [3, 1], [5, 8]\}$

Řešení. Funkce je dána 3 body, Lagrangeův polynom je stupně maximálně 2 a má tvar

$$L_2(x) = 2 \cdot l_0(x) + 1 \cdot l_1(x) + 8 \cdot l_2(x).$$

Nyní stačí sestavit a upravit koeficienty $l_k(x)$

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)} = \frac{x^2-8x+15}{8} \\ l_1(x) &= \frac{(x-1)(x-5)}{(3-1)(3-5)} = \frac{x^2-6x+5}{-4} \\ l_2(x) &= \frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)} = \frac{x^2-4x+3}{8} \end{aligned}$$

a následně do Lagrangeova polynomu dosadit

$$L_2(x) = L_2(x) = 2 \cdot \frac{x^2-8x+15}{8} + 1 \cdot \frac{x^2-6x+5}{-4} + 8 \cdot \frac{x^2-4x+3}{8} = \underline{\underline{x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{11}{2}}}$$

Úlohy 2.
Aproximujte přímkou funkci metodou nejmenších čtverců
1. $f(x) = \{[0,0],[1,1],[2,0],[3,3],[4,2],[5,2],[6,3]\}$

Řešení. Hledáme přímku $y = ax + b$. $a, b \in \mathbb{R}$ vypočítáme pomocí soustavy

$$a\sum_{k=1}^{n} x_k + b \cdot n = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$
$$a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot f_k(x)$$

a již víme, že $n = 7$ (počet bodů).

x	$f(x)$	x^2	$x \cdot f(x)$
0	0	0	0
1	1	1	1
2	0	4	0
3	3	9	9
4	2	16	8
5	2	25	10
6	3	36	18
$\sum_{k=1}^{7}$ 21	$\sum_{k=1}^{7}$ 11	$\sum_{k=1}^{7}$ 91	$\sum_{k=1}^{7}$ 46

$$a \cdot 21 + b \cdot 7 = 11$$
$$a \cdot 91 + b \cdot 21 = 46$$

Sčítací nebo dosazovací metodou vypočítáme:

$$a = \frac{13}{28}, \quad b = \frac{5}{28}, \quad \underline{\underline{y = \frac{13}{28}x + \frac{5}{28}}}$$

2. $f(x) = \{[-1, 2], [-2, 1], [1, 0], [2, 0], [4, -1], [5, -1]\}$

Řešení. Hledáme přímku $y = ax + b$. $a, b \in \mathbb{R}$ vypočítáme pomocí soustavy

$$a\sum_{k=1}^{n} x_k + b \cdot n = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$
$$a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot f_k(x)$$

a již víme, že $n = 6$ (počet bodů).

x	$f(x)$	x^2	$x \cdot f(x)$
-1	2	1	-2
-2	1	4	-2
1	0	1	0
2	0	4	0
4	-1	16	-4
5	-1	25	-5
$\sum_{k=1}^{6}$ 9	$\sum_{k=1}^{6}$ 1	$\sum_{k=1}^{6}$ 51	$\sum_{k=1}^{6}$ -13

$$a \cdot 9 + b \cdot 6 = 1$$
$$a \cdot 51 + b \cdot 9 = -13$$

Sčítací nebo dosazovací metodou vypočítáme:

$$a = -\frac{29}{75}, \quad b = \frac{56}{75}, \quad \underline{\underline{y = -\frac{29}{75}x + \frac{56}{75}}}$$