MENDELU Agronomická fakulta

Mendelova univerzita v Brně

MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

MATM – MATEMATIKA

LAGRANGEŮV POLYNOM, METODA NEJMENŠ. ČTVERCŮ

Mgr. Radka SMÝKALOVÁ, Ph.D.

radka.smykalova@mendelu.cz

Aproximace (odhad, přiblížení, nahrazení) funkce

V praxi mnohohrát aproximujeme danou funkci jinou funkcí - *jednodušší*. Nejčasteji *polynomem*. Dvě základní metody používané k nahrazení jsou

- aproximace Lagrangeovým polynomem,
- aproximace metodou nejmenších čtverců.

Lagrangeův interpolační polynom

Interpolaci (nalezení přibližné hodnoty) používáme v případě, že funkce $f(x)$, kterou chceme nahradit, je dána $(n+1)$ **body**

$$f(x) = \{[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)], \ldots, [x_n, f(x_n)]\}.$$

Polynom $P(x)$, kterým funkci nahradíme, těmito body **prochází**.

Lagrangeův tvar tohoto polynomu je

$$L_n(x) = f(x_0) \cdot l_0(x) + f(x_1) \cdot l_1(x) + \cdots + f(x_n) \cdot l_n(x),$$

kde

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdot (x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

V čitateli chybí činitel $(x - x_k)$ a ve jmenovateli $(x_k - x_k)$.

Příklad.
Napište Lagrangeův interpolační polynom, který aproximuje funkci

$$f(x) = \{[-1, 2], [0, 4], [2, 0], [3, 4]\}.$$

Řešení. Funkce je dána 4 body, Lagrangeův polynom je stupně maximálně 3 a má tvar

$$L_3(x) = 2 \cdot l_0(x) + 4 \cdot l_1(x) + 0 \cdot l_2(x) + 4 \cdot l_3(x).$$

Nyní stačí sestavit a upravit koeficienty $l_k(x)$

$$l_0(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)} = \frac{x^3-5x^2+6x}{-12}$$

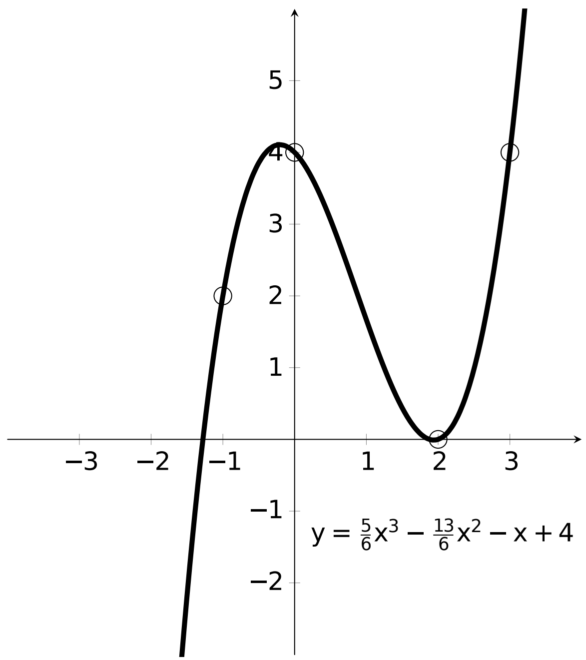
$$l_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(0+1)(0-2)(0-3)} = \frac{x^3-4x^2+x+6}{6}$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-3)}{(2+1)(2-0)(2-3)} = \frac{x^3-2x^2-3x}{-6}$$

$$l_3(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(3+1)(3-0)(3-2)} = \frac{x^3-x^2-2x}{12}$$

a následně do Lagrangeova polynomu dosadit

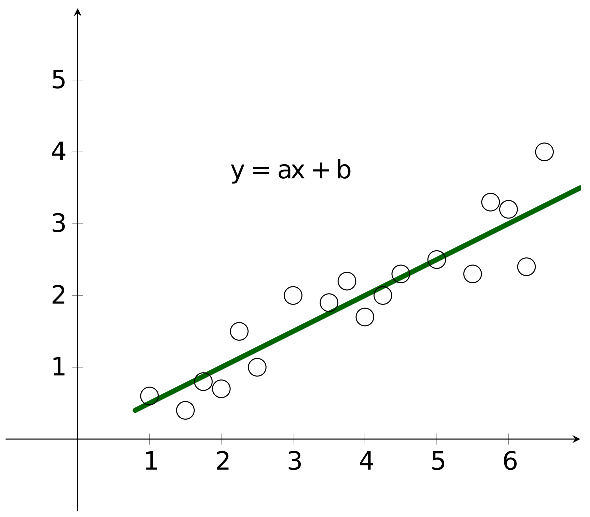
$$L_3(x) = 2 \cdot \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{-12} + 4 \cdot \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{6} +$$
$$+0 \cdot \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{-6} + 4 \cdot \frac{x^3 - x^2 - 2x}{12} = \underline{\underline{\frac{5}{6}x^3 - \frac{13}{6}x^2 - x + 4}}$$

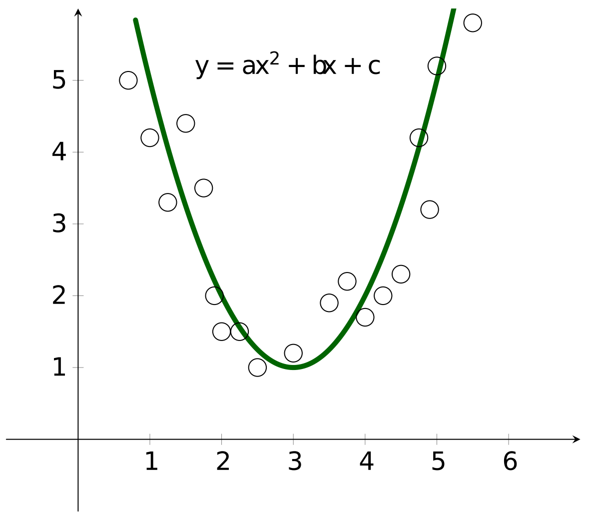


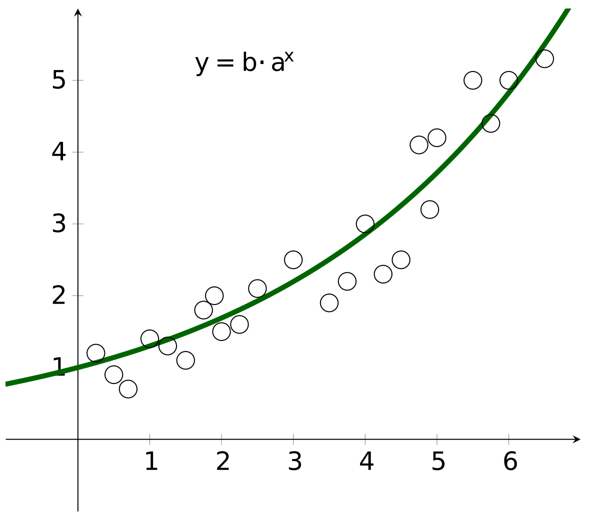
Metoda nejmenších čtverců

Používá se pro aproximaci funkce dané tabulkou (n **bodů**), jsou-li hodnoty $f(x_k)$ zatíženy chybami (například při měření) nebo je-li jich velký počet. V těchto případech nepožadujeme, aby aproximační funkce body souboru procházela, ale **prokládáme** je polynomem nebo jinou funkcí tak, aby byla bodům „co nejblíže“.

K aproximaci používáme *přímku, parabolu, exponenciální funkci* atd. podle toho, na jakou závislost mezi body souboru usuzujeme:







Metoda nejmenších čtverců - u této metody se jako kritérium „co největšího přiblížení“ požaduje, aby **součet obsahů čtverců**, které mají vždy jeden vrchol v každém z bodů $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)], \ldots, [x_n, f(x_n)]$ a druhý vrchol na aproximační funkci kolmo nad nebo pod daným bodem, **byl co nejmenší**.

U přímky

$$y = ax + b, \qquad \text{kde } a, b \in \mathbb{R}$$

vede tento požadavek k rovnicím:

$$a\sum_{k=1}^{n} x_k + b \cdot n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

$$a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot f(x_k)$$

$\sum_{k=1}^{n} x_k$ - součet x-ových souřadnic bodů funkce $f(x)$
n - počet bodů funkce $f(x)$
$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ - součet y-ových souřadnic bodů funkce $f(x)$
$\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ - součet druhých mocnic x-ových souřadnic bodů funkce $f(x)$
$\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot f(x_k)$ - součet součinů souřadnic jednotlivých bodů funkce $f(x)$

Příklad.
Aproximujte (nahraďte) přímkou funkci

$$f(x) = \{[-2,-1],[-1,-1],[0,0],[2,1],[3,1],[4,2]\}\,.$$

Řešení. Hledáme přímku $y = ax+b$. $a, b \in \mathbb{R}$ vypočítáme pomocí soustavy

$$a\sum_{k=1}^{n} x_k + b\cdot n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$
$$a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k\cdot f(x_k)$$

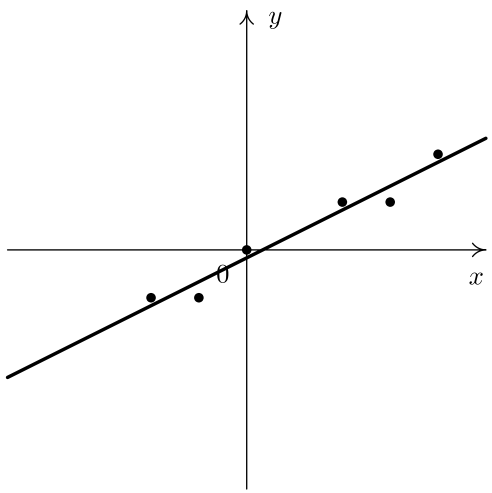
a již víme, že $n = 6$ (počet bodů).

x	$f(x)$	x^2	$x \cdot f(x)$
-2	-1	4	2
-1	-1	1	1
0	0	0	0
2	1	4	2
3	1	9	3
4	2	16	8
$\sum_{k=1}^{6}$ 6	$\sum_{k=1}^{6}$ 2	$\sum_{k=1}^{6}$ 34	$\sum_{k=1}^{6}$ 16

$$a \cdot 6 + b \cdot 6 = 2$$
$$a \cdot 34 + b \cdot 6 = 16$$

Sčítací nebo dosazovací metodou vypočítáme:

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{6}, \quad \underline{\underline{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}}}$$



Úlohy 1.

Napište Lagrangeův interpolační polynom, který aproximuje funkci

1. $f(x) = \{[1, -1], [2, 0], [4, 1]\}$

2. $f(x) = \{[1, 2], [3, 1], [5, 8]\}$

Úlohy 2.

Aproximujte přímkou funkci metodou nejmenších čtverců

1. $f(x) = \{[0, 0], [1, 1], [2, 0], [3, 3], [4, 2], [5, 2], [6, 3]\}$

2. $f(x) = \{[-1, 2], [-2, 1], [1, 0], [2, 0], [4, -1], [5, -1]\}$