MATM – MATEMATIKA

FUNKCE, ZÁKLADNÍ POJMY - ŘEŠENÍ ÚLOH

Mgr. Radka SMÝKALOVÁ, Ph.D.
radka.smykalova@mendelu.cz

Úlohy 1.

Určete definiční obor funkce:

1. $y = \sqrt{x+12}$

Řešení. Jestliže $y = \sqrt{x}$, pak $x \geq 0$. Tedy $y = \sqrt{x+12} \implies x + 12 \geq 0$.

$$\begin{aligned} x + 12 &\geq 0 \\ x &\geq -12 \\ \underline{\underline{D(f) : x \in \langle -12, \infty)}} \end{aligned}$$

2. $y = \frac{15}{x^2-5x+6}$

Řešení. Jestliže $y = \frac{1}{x}$, pak $x \neq 0$. Tedy $y = \frac{1}{x^2-5x+6} \implies x^2 - 5x + 6 \neq 0$. Kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ se vypočítají $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (a = 1, b = -5, c = 6) \\ x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= 3 \\ \underline{\underline{D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}}} \end{aligned}$$

3. $y = \log(x - 6)$

Řešení. Jestliže $y = \log_a x$, pak $x > 0$. Tedy $y = \log(x - 6) \implies x - 6 > 0$.

$$\begin{aligned} x - 6 &> 0 \\ x &> 6 \\ \underline{\underline{D(f) : x \in (6, \infty)}} \end{aligned}$$

4. $y = \arcsin \frac{x}{3}$

Řešení. Jestliže $y = \arcsin x$, pak $x \in \langle -1, 1\rangle$. Tedy $x \geq -1 \quad \wedge \quad x \leq 1$. ($\wedge$… značka pro “a zároveň”) Tedy $y = \arcsin \frac{x}{3} \implies \frac{x}{3} \in \langle -1, 1\rangle$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} \geq -1 \quad &\wedge \quad \frac{x}{3} \leq 1 \\ x \geq -3 \quad &\wedge \quad x \leq 3 \\ \underline{\underline{D(f) : x \in \langle -3, 3\rangle}} \end{aligned}$$

5. $y = \arccos\left(\frac{x}{2} - 3\right)$

Řešení. Jestliže $y = \arccos x$, pak $x \in \langle -1, 1\rangle$. To znamená $x \geq -1 \quad \wedge \quad x \leq 1$. ($\wedge \ldots$ značka pro "a zároveň") Tedy $y = \arccos\left(\frac{x}{2} - 3\right) \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{x}{2} - 3\right) \in \langle -1, 1\rangle$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - 3 \geq -1 \quad &\wedge \quad \frac{x}{2} - 3 \leq 1 \\ \frac{x}{2} \geq 2 \quad &\wedge \quad \frac{x}{2} \leq 4 \\ x \geq 4 \quad &\wedge \quad x \leq 8 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{D(f) : x \in \langle 4, 8\rangle}}$$

6. $y = \ln(x + 7) - \sqrt{x^2 - x - 6}$

Řešení. Jesliže $y = \ln x$, pak $x > 0$ a zároveň z $y = \sqrt{x}$ plyne $x \geq 0$. Pro $y = \ln(x + 7) - \sqrt{x^2 - x - 6} \quad \Longrightarrow \quad x + 7 > 0$ a zároveň $x^2 - x - 6 \geq 0$.

$$\begin{aligned} x + 7 > 0 \quad &\wedge \quad x^2 - x - 6 \geq 0 \\ x > -7 \quad &\wedge \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} \\ x \in (-7, \infty) \quad &\wedge \quad x_1 = 3 \\ & x_2 = -2 \\ & (x - 3)(x + 2) \geq 0 \\ & x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 3, \infty) \end{aligned}$$

Oba výsledky musí platit zároveň (značka $\wedge$), musíme udělat průnik (značka $\cap$).

$$\underline{\underline{D(f) : x \in (-7, -2\rangle \cup \langle 3, \infty)}}$$

7. $y = \arcsin \frac{3}{x-1}$

Řešení. Jesliže $y = \arcsin x$, pak $x \in \langle -1, 1\rangle$, což znamená $x \geq -1 \quad \wedge \quad x \leq 1$ ($\wedge \ldots$ značka pro "a zároveň"). Současně z $y = \frac{1}{x}$ plyne $x \neq 0$. Tedy pro $y = \arcsin \frac{3}{x-1}$ získáváme $\frac{3}{x-1} \in \langle -1, 1\rangle$ a zároveň $x - 1 \neq 0$.

$$
\begin{array}{rcrcr}
\dfrac{3}{x-1} \geq -1 & \wedge & \dfrac{3}{x-1} \leq 1 & \wedge & x-1 \neq 0 \\
\dfrac{3}{x-1} + 1 \geq 0 & \wedge & \dfrac{3}{x-1} - 1 \leq 0 & \wedge & x \neq 1 \\
\dfrac{3+x-1}{x-1} \geq 0 & \wedge & \dfrac{3-(x-1)}{x-1} \leq 0 & & \\
\dfrac{2+x}{x-1} \geq 0 & \wedge & \dfrac{4-x}{x-1} \leq 0 & & \\
x \in (-\infty, -2\rangle \cup (1, \infty) & \wedge & x \in (-\infty, 1) \cup \langle 4, \infty) & &
\end{array}
$$

Všechny tři výsledky musí platit zároveň (značka $\wedge$), musíme udělat průnik (značka $\cap$).

$$\underline{\underline{D(f) : x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 4, \infty)}}$$

Úlohy 2.
U všech základních elementárních funkcí urči z grafu definiční obor a vlastnosti funkce - prostá/není prostá, parita, ohraničenost, periodičnost, monotónnost.

- Lineární funkce, např. $y = x$: $D(f) = \mathbb{R}$, prostá, lichá, neohraničená, není periodická, rostoucí.
- Lineární - konstantní funkce, např. $y = 2$: $D(f) = \mathbb{R}$, není prostá, sudá, ohraničená, není periodická, konstantní.
- Kvadratická funkce $y = x^2$: $D(f) = \mathbb{R}$, není prostá, sudá, ohraničená zdola, není periodická, není monotónní.
- Mocninná funkce, např. $y = x^3$: $D(f) = \mathbb{R}$, prostá, lichá, neohraničená, není periodická, rostoucí.
- Mocninná funkce, např. $y = \frac{1}{x^2}$: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, není prostá, sudá, ohraničená zdola, není periodická, není monotónní.
- Mocninná funkce, např. $y = \frac{1}{x^3}$: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, prostá, lichá, neohraničená, není periodická, není monotónní.
- Logaritmická funkce, např. $y = \ln x$: $D(f) = (0, \infty)$, prostá, není sudá ani lichá, neohraničená, není periodická, rostoucí.
- Exponenciální funkce, např. $y = (\frac{1}{2})^x$: $D(f) = \mathbb{R}$, prostá, není sudá ani lichá, ohraničená zdola, není periodická, klesající.
- Goniometrická funkce $y = \sin x$: $D(f) = \mathbb{R}$, není prostá, lichá, ohraničená, periodická, není monotónní.
- Goniometrická funkce $y = \cos x$: $D(f) = \mathbb{R}$, není prostá, sudá, ohraničená, periodická, není monotónní.
- Goniometrická funkce $y = \operatorname{tg} x$: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\cdots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\}$, není prostá, lichá, neohraničená, periodická, není monotónní.

- Goniometrická funkce $y = \operatorname{cotg} x$: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\cdots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, \cdots\}$, není prostá, lichá, neohraničená, periodická, není monotónní.
- Cyklometrická funkce $y = \arcsin x$: $D(f) = \langle -1, 1 \rangle$, prostá, lichá, ohraničená, není periodická, rostoucí.
- Cyklometrická funkce $y = \arccos x$: $D(f) = \langle -1, 1 \rangle$, prostá, není sudá ani lichá, ohraničená, není periodická, klesající.
- Cyklometrická funkce $y = \operatorname{arctg} x$: $D(f) = \mathbb{R}$, prostá, lichá, ohraničená, není periodická, rostoucí.
- Cyklometrická funkce $y = \operatorname{arccotg} x$: $D(f) = \mathbb{R}$, prostá, není sudá ani lichá, ohraničená, není periodická, klesající.

Úlohy 3. Určete inverzní funkci k funkcím:
1. $y = x^3 - 2$
Řešení. Víme, že výpočet inverzní funkce $f^{-1}(x)$ z předpisu $f(x)$ je následující:
V zadání funkce $y = f(x)$ zaměníme x za y a současně y za x. Následně vyjádříme proměnnou y. A to je naše hledaná inverzní funkce.

$$\begin{aligned} f(x): \qquad y &= x^3 - 2 \\ f^{-1}(x): \qquad x &= y^3 - 2 \\ x + 2 &= y^3 \\ y^3 &= x + 2 \\ y &= \sqrt[3]{x+2} \end{aligned}$$

2. $y = \log_5 x$
Řešení. Víme, že výpočet inverzní funkce $f^{-1}(x)$ z předpisu $f(x)$ je následující:
V zadání funkce $y = f(x)$ zaměníme x za y a současně y za x. Následně vyjádříme proměnnou y. A to je naše hledaná inverzní funkce.

$$\begin{aligned} f(x): \qquad y &= \log_5 x \\ f^{-1}(x): \qquad x &= \log_5 y \\ 5^x &= y \\ y &= 5^x \end{aligned}$$

3. $y = \mathrm{e}^{x+6}$
Řešení. Víme, že výpočet inverzní funkce $f^{-1}(x)$ z předpisu $f(x)$ je následující:

V zadání funkce $y = f(x)$ zaměníme x za y a současně y za x. Následně vyjádříme proměnnou y. A to je naše hledaná inverzní funkce.

$$\begin{aligned} f(x): \qquad && y &= \mathrm{e}^{x+6} \\ f^{-1}(x): \qquad && x &= \mathrm{e}^{y+6} \\ && \ln x &= y + 6 \\ && \ln x - 6 &= y \\ && y &= \ln x - 6 \end{aligned}$$

4. $y = \frac{1}{x+19}$
Řešení. Víme, že výpočet inverzní funkce $f^{-1}(x)$ z předpisu $f(x)$ je následující:
V zadání funkce $y = f(x)$ zaměníme x za y a současně y za x. Následně vyjádříme proměnnou y. A to je naše hledaná inverzní funkce.

$$\begin{aligned} f(x): \qquad && y &= \frac{1}{x+19} \\ f^{-1}(x): \qquad && x &= \frac{1}{y+19} \quad / \cdot (y+19) \\ && x \cdot (y+19) &= 1 \quad / \div x \\ && y + 19 &= \frac{1}{x} \\ && y &= \frac{1}{x} - 19 \end{aligned}$$

5. $y = \sin x$
Řešení. Víme, že výpočet inverzní funkce $f^{-1}(x)$ z předpisu $f(x)$ je následující:
V zadání funkce $y = f(x)$ zaměníme x za y a současně y za x. Následně vyjádříme proměnnou y. A to je naše hledaná inverzní funkce.

$$\begin{aligned} f(x): \qquad && y &= \sin x \\ f^{-1}(x): \qquad && x &= \sin y \\ && \arcsin x &= y \\ && y &= \arcsin x \end{aligned}$$

Úlohy 4. Rozhodněte, zda je funkce ryze nebo neryze lomená. U neryze lomených funkcí následně proveďte dělení polynomu polynomem:

1. $y = \frac{x^4+4x^2+3}{x^2+3}$

Řešení. Polynom v čitateli je stupně 4 a polynom ve jmenovateli je stupně 2. $4 \geq 2$, funkce je tedy neryze lomená. Následuje dělení polynomu polynomem:

$$
\begin{array}{rlllll}
 & (\underline{x^4} & +0x^3 & +4x^2 & +0x & +3) : (\underline{x^2} + 3) = \underline{\underline{x^2 + 1}} \\
-(& x^4 & & +3x^2) & & \\
 & & & \underline{x^2} & & +3 \\
 & & -(& x^2 & & +3) \\
 & & & & & 0
\end{array}
$$

2. $y = \frac{x^4+4x^2+2+x}{x^2+3}$ (Pozor, nejdříve seřadit členy obou polynomů od největšího stupně po nejmenší!)

Řešení. Polynom v čitateli je stupně 4 a polynom ve jmenovateli je stupně 2. $4 \geq 2$, funkce je tedy neryze lomená. Následuje dělení polynomu polynomem:

$$
\begin{array}{rlllll}
 & (\underline{x^4} & +0x^3 & +4x^2 & +x & +2) : (\underline{x^2} + 3) = \underline{\underline{x^2 + 1 + \dfrac{x-1}{x^2+3}}} \\
-(& x^4 & & +3x^2) & & \\
 & & & \underline{x^2} & +x & +2 \\
 & & -(& x^2 & & +3) \\
 & & & & x & -1
\end{array}
$$

3. $y = \frac{2x^3+3x^2+x}{x-1}$

Řešení. Polynom v čitateli je stupně 3 a polynom ve jmenovateli je stupně 1. $3 \geq 1$, funkce je tedy neryze lomená. Následuje dělení polynomu polynomem:

$$
\begin{array}{rllll}
 & (\underline{2x^3} & +3x^2 & +x & +0) : (\underline{x} - 1) = \underline{\underline{2x^2 + 5x + 6 + \dfrac{6}{x-1}}} \\
-(& 2x^3 & -2x^2) & & \\
 & & \underline{5x^2} & +x & +0 \\
 & -(& 5x^2 & -5x) & \\
 & & & \underline{6x} & +0 \\
 & & -(& 6x & -6) \\
 & & & & 6
\end{array}
$$

Úlohy 5. Najděte celočíselné kořeny polynomu:

1. $x^4 - 4x^2 + 9x - 18 = 0$

Řešení. Absolutní člen je -18. Dělitelé -18 jsou $D(-18) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$.

	1	0	-4	9	-18	
1	1	1	-3	6	-12	číslo 1 není kořen
-1	1	-1	-3	12	-30	číslo -1 není kořen
2	1	2	0	9	$\boxed{0}$	číslo 2 je kořen $\Rightarrow$ $(x-2)\cdot(x^3+2x^2+9)$ Nový polynom s absolutním členem 9. $D(9) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$
3	1	5	15	54		číslo 3 není kořen
-3	1	-1	3	$\boxed{0}$		číslo -3 je kořen $\Rightarrow$ $(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x^2-x+3)$ Nový polynom je kvadratický. Počítáme kvadratickou rovnici.

$x^2 - x + 3 = 0 \quad \Rightarrow$ Diskriminant je záporný, rovnice nemá řešení.

Celočíselné kořeny polynomu jsou: $\underline{\underline{x_1 = 2, x_2 = -3}}$

2. $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$

Řešení. Absolutní člen je -12. Dělitelé -12 jsou $D(-12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$.

	1	-3	-5	15	4	-12	
1	1	-2	-7	8	12	$\boxed{0}$	číslo 1 je kořen $\Rightarrow$ $(x-1)\cdot(x^4-2x^3-7x^2+8x+12)$ Nový polynom se stejným absolutním členem 12.
1	1	-1	-8	0	12		číslo 1 není dvojnásobný kořen
-1	1	-3	-4	12	$\boxed{0}$		číslo -1 je kořen $\Rightarrow$ $(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^3-3x^2-4x+12)$ Nový polynom se stejným absolutním členem 12.
-1	1	-4	0	12			číslo -1 není dvojnásobný kořen
2	1	-1	-6	$\boxed{0}$			číslo 2 je kořen $\Rightarrow$ $(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x^2-x-6)$ Nový polynom je kvadratický - kvadratická rovnice.

$x^2 - x - 6 = 0 \quad \Rightarrow$ Kořeny jsou: $x_1 = 3, x_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 6 = (x-3)\cdot(x+2)$

Celočíselné kořeny polynomu jsou: $\underline{\underline{x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = -2}}$