MATM – MATEMATIKA

FUNKCE, ZÁKLADNÍ POJMY

Mgr. Radka SMÝKALOVÁ, Ph.D.

radka.smykalova@mendelu.cz

Číselné množiny (obory)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$ - přirozená čísla

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ - celá čísla

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$ - racionální čísla (lze je zapsat pomocí zlomku)

$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ - iracionální čísla (nelze je zapsat pomocí zlomku)

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ - reálná čísla

$\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} : a, b \in \mathbb{R}\}$ - komplexní čísla

Funkce

DEFINICE (Funkce o jedné reálné proměnné x).

Funkce f je předpis, který každému x z nějaké množiny D přiřazuje *právě jedno* reálné číslo y z množiny H.
Množinu D nazýváme definiční obor funkce f. Označujeme ji $D(f)$.
Množina všech $y \in \mathbb{R}$, ke kterým existuje $x \in \mathbb{R}$ tak, že $[x, y] \in f$, se nazývá obor hodnot funkce f. Označujeme ji $H(f)$.
$x \in D(f)$ se nazývá argument funkce f.
$y \in H(f)$ se nazývá hodnota funkce f.
Zapisujeme $f(x) = y$.

DEFINICE (Graf funkce).

Množina všech bodů $[x, y]$ v rovině takových, že $x \in D(f)$ a $y \in H(f)$, se nazývá graf funkce f.

Definiční obor. Množina všech bodů, které proměnná x nabývá.

Příklad.

1. $y = \sqrt{x} \implies x \geq 0,\ D(f) = \langle 0, \infty)$
2. $y = \frac{1}{x} \implies x \neq 0,\ D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
3. $y = \log_a x, y = \ln x \implies x > 0,\ D(f) = (0, \infty)$
4. $y = \operatorname{tg} x \implies x \neq \dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots,\ D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\},\ k \in \mathbb{Z}$
5. $y = \operatorname{cotg} x \implies x \neq \dots, 0, \pi, 2\pi, \dots,\ D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\},\ k \in \mathbb{Z}$
6. $y = \arcsin x \implies -1 \leq x \leq 1,\ D(f) = \langle -1, 1 \rangle$
7. $y = \arccos x \implies -1 \leq x \leq 1,\ D(f) = \langle -1, 1 \rangle$

Úlohy 1.

Určete definiční obor funkce:

1. $y = \sqrt{x + 12}$ **2.** $y = \frac{15}{x^2 - 5x + 6}$ **3.** $y = \log(x - 6)$ **4.** $y = \arcsin \frac{x}{3}$

5. $y = \arccos\left(\frac{x}{2} - 3\right)$ **6.** $y = \ln(x + 7) - \sqrt{x^2 - x - 6}$ **7.** $y = \arcsin \frac{3}{x - 1}$

Vlastnosti funkce

- DEFINICE (Prostá funkce). Funkce f je na $D(f)$ *prostá*, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$, kde $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.
  (Žádná dvě různá x nenabývají stejné hodnoty y. Je-li funkce prostá, pak každá přímka rovnoběžná s osou x protíná graf funkce maximálně v jednom bodě.)
- DEFINICE (Parita). Funkce f je *sudá*, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí:

$$-x \in D(f) \qquad \text{a} \qquad f(x) = f(-x).$$

(Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy y.)

Funkce f je *lichá*, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí:

$$-x \in D(f) \qquad \text{a} \qquad f(x) = -f(-x).$$

(Graf liché funkce je středově souměrný podle bodu $[0, 0]$.)

- DEFINICE (Ohraničenost). Funkce f je na $D(f)$
  - *zdola ohraničená*, jestliže existuje $d \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) \geq d$ pro každé $x \in D(f)$. (Je-li funkce ohraničená zdola, pak existuje přímka rovnoběžná s osou x taková, že graf funkce leží *nad* touto přímkou.)
  - *shora ohraničená*, jestliže existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) \leq h$ pro každé $x \in D(f)$. (Je-li funkce ohraničená shora, pak existuje přímka rovnoběžná s osou x taková, že graf funkce leží *pod* touto přímkou.)
  - *ohraničená*, jestliže je ohraničená zdola i shora. (Je-li funkce ohraničená, graf funkce leží mezi dvěma přímkami rovnoběžnými s osou x.)

  V opačném případě se funkce nazývá *neohraničená*.

- DEFINICE (Periodičnost). Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Funkce f je *periodická* s periodou p, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí

$$x \pm p \in D(f) \qquad \text{a} \qquad f(x+p) = f(x) = f(x-p).$$

(Graf periodické funkce se vyznačuje tak, že se úsek délky p stále opakuje.)

- DEFINICE (Monotónnost). Funkce f je na množině $M \in D(f)$

– *rostoucí*, právě když pro každá dvě $x_1, x_2 \in M$ platí:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

– *klesající*, právě když pro každá dvě $x_1, x_2 \in M$ platí:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

– *nerostoucí*, právě když pro každá dvě $x_1, x_2 \in M$ platí:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

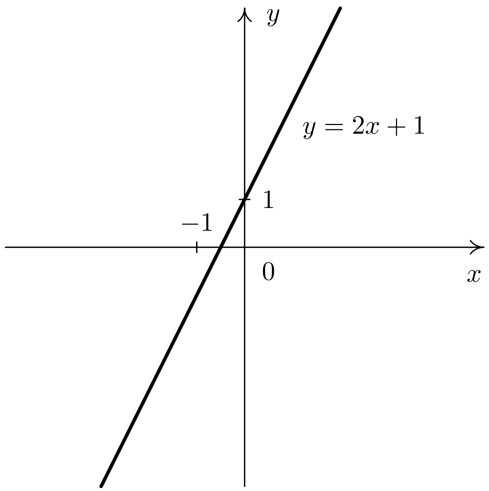
– *neklesající*, právě když pro každá dvě $x_1, x_2 \in M$ platí:

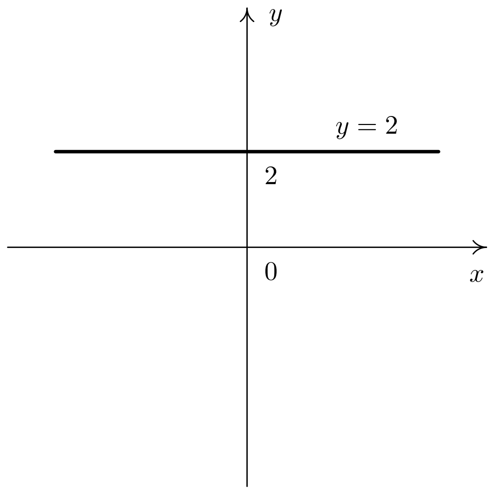
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

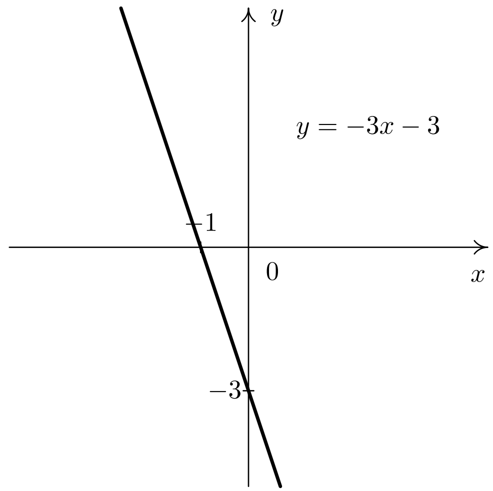
Je-li funkce rostoucí nebo klesající, nazývá se *ryze monotónní*.

Základní elementární funkce

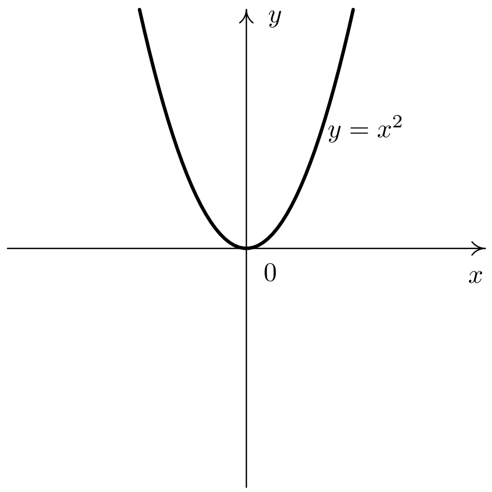
1. *Lineární funkce*: $y = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.
   Konstantní funkce: speciální případ lineární funkce, kde $a = 0$, tedy $y = b$.

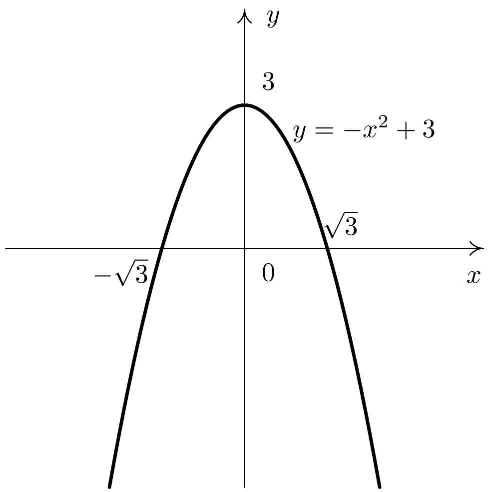


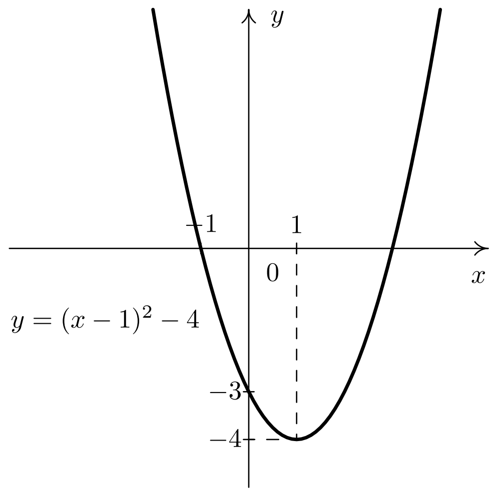




2. *Kvadratická funkce:* $y = x^2$

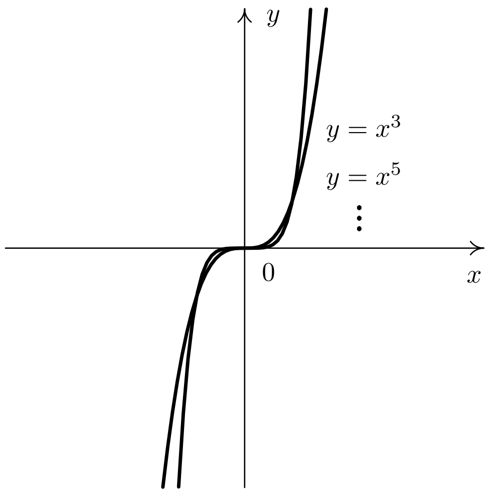


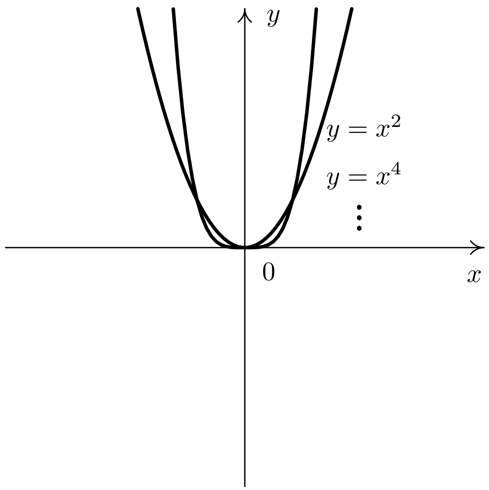


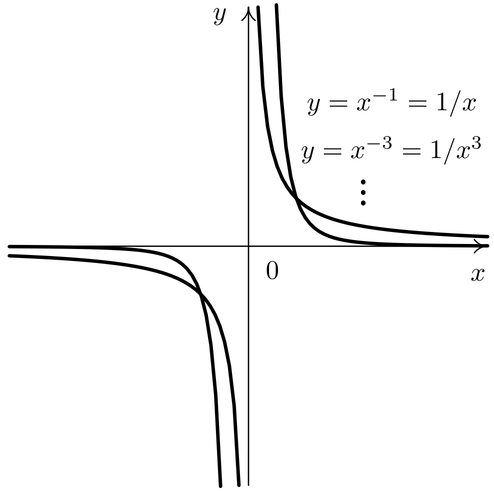


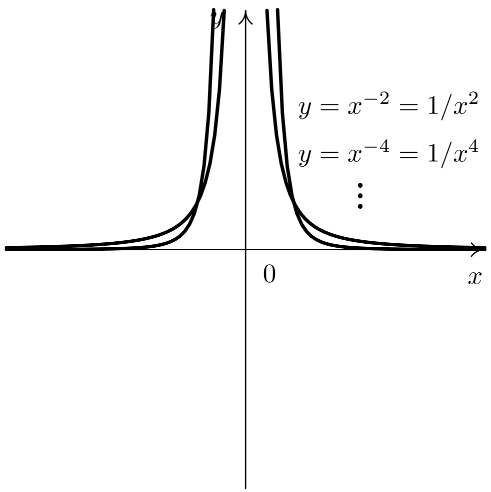
3. *Mocninné funkce:* $y = x^n$, kde $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$

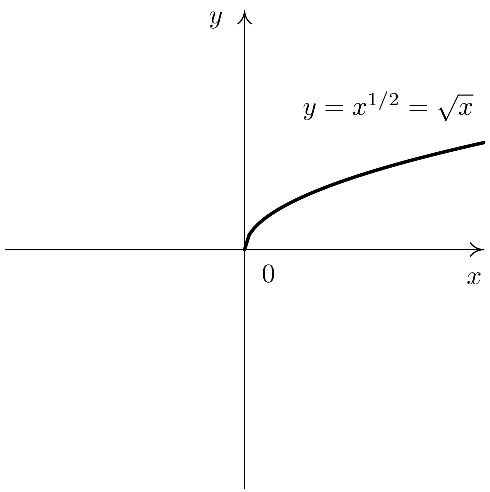
$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$







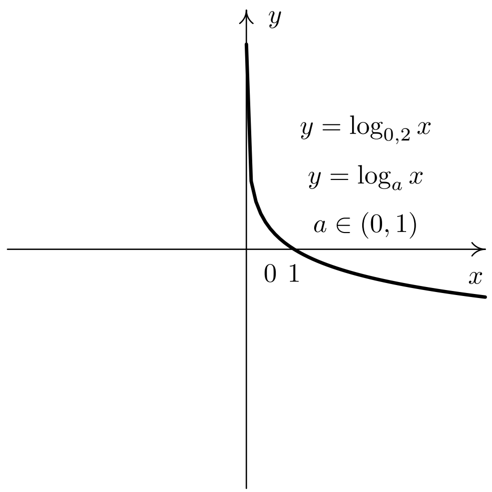


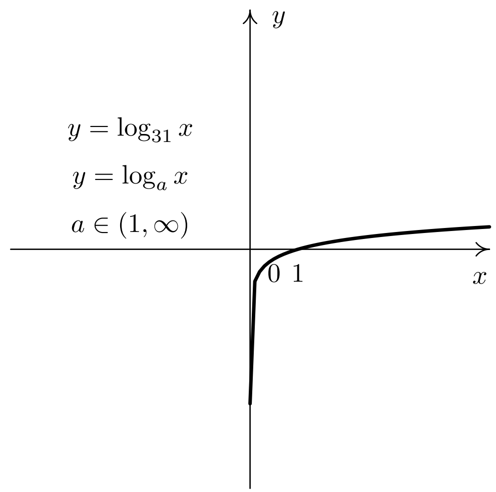


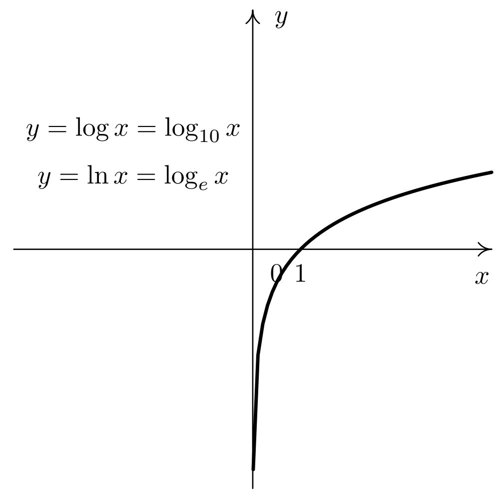
4. *Logaritmická funkce:* $y = \log_a x$, kde a $(a > 0, a \neq 1)$ je základ. Platí

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y.$$

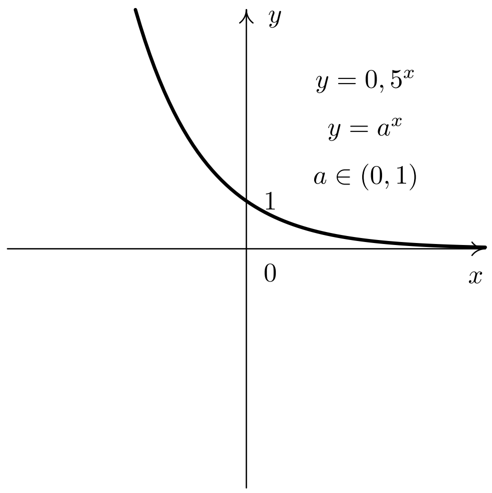
$a \in (0, 1)$ graf funkce klesá, $a \in (1, \infty)$ graf funkce roste.
Pokud $a = 10$, píšeme $y = \log x$ a nazýváme ho *dekadický logaritmus*, pokud $a = \mathrm{e} = 2,71\ldots$ (Eulerovo číslo), píšeme $y = \ln x$ a nazýváme ho *přirozený logaritmus*.

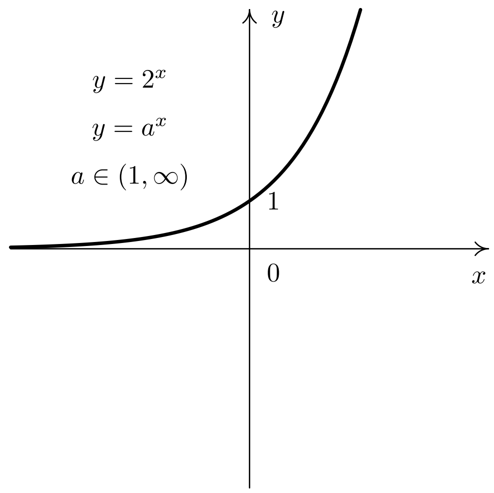


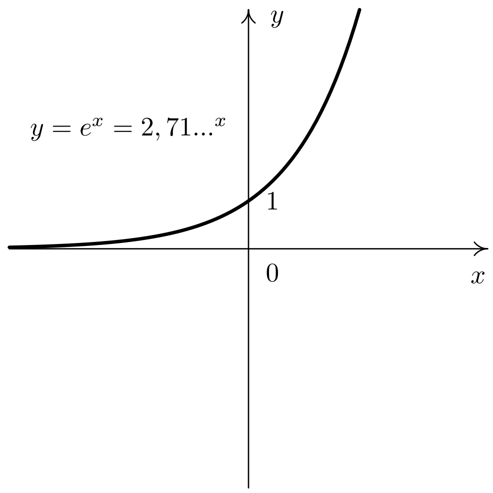




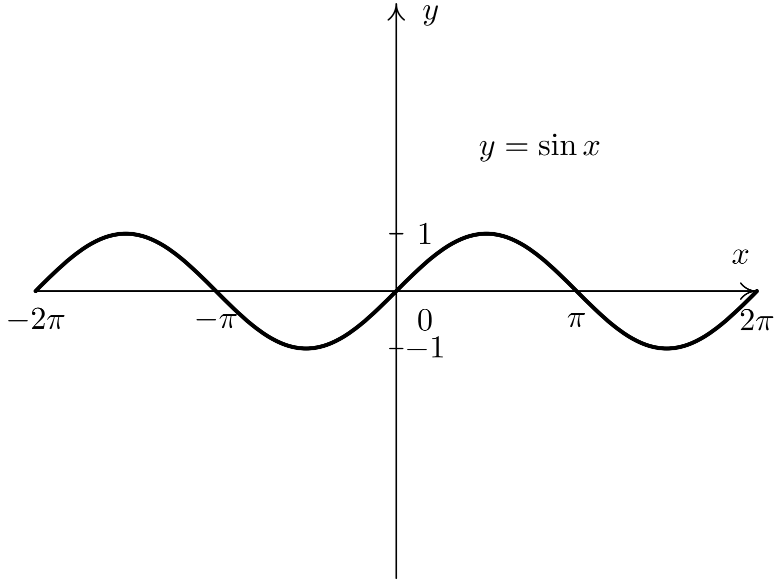
5. *Exponenciální funkce:* $y = a^x$, kde a ($a > 0, a \neq 1$) je základ. $a \in (0,1)$ graf funkce klesá, $a \in (1,\infty)$ graf funce roste.
Pokud $a = \mathrm{e} = 2,71\ldots$ (Eulerovo číslo), píšeme $y = \mathrm{e}^x$ a mluvíme o *přirozené exponenciální funkci*.

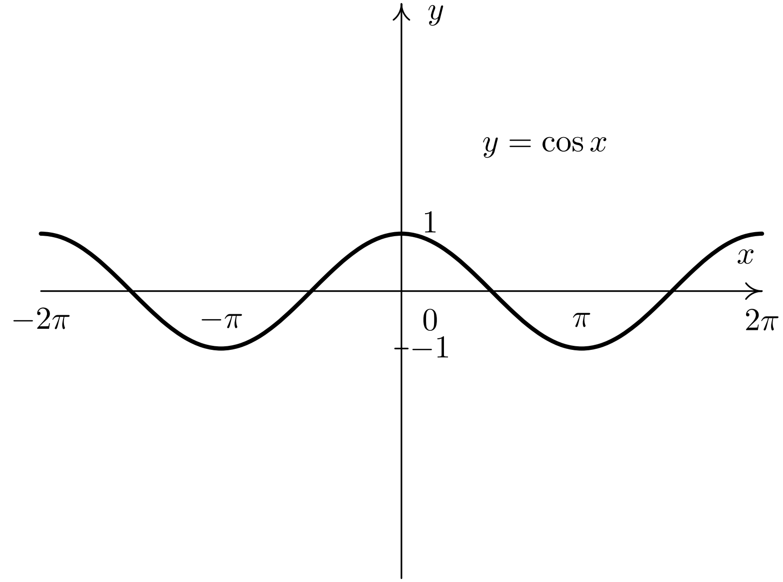


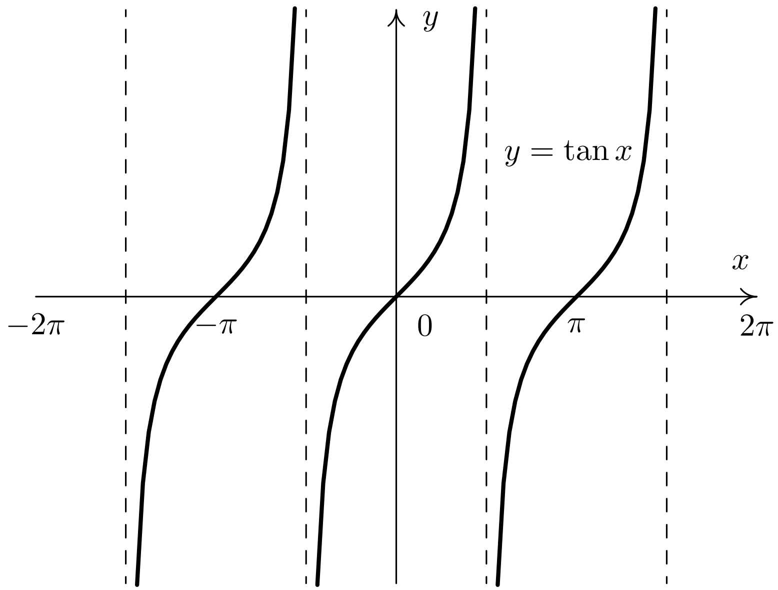


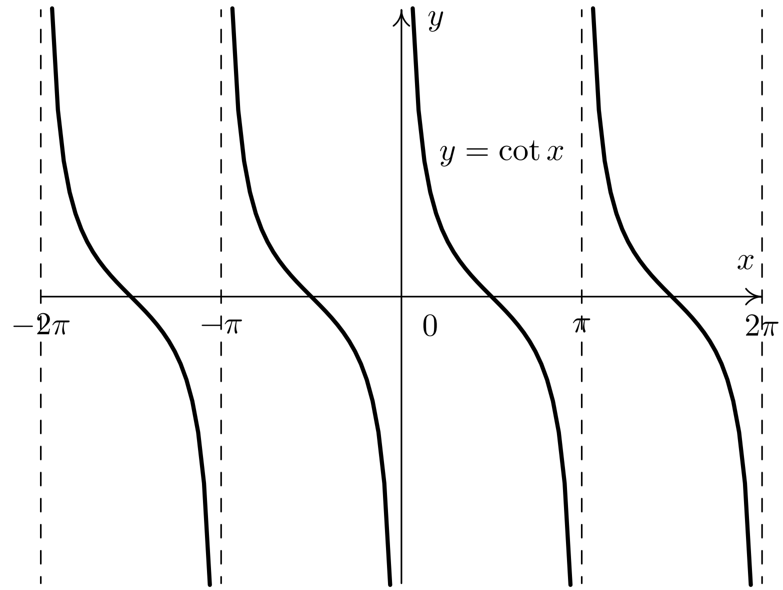


6. *Goniometrické funkce:* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$.









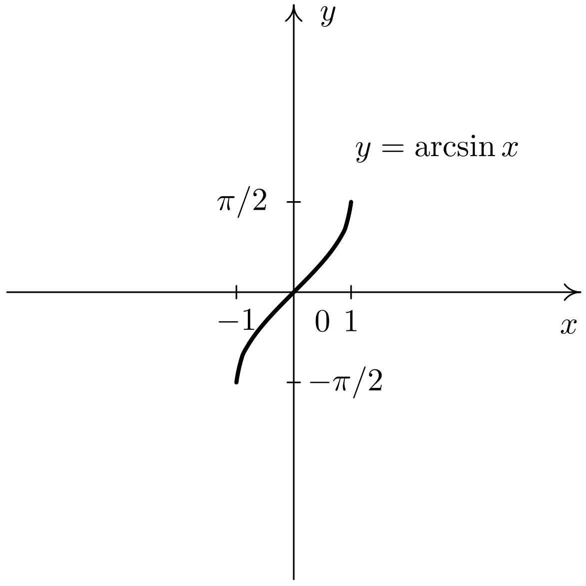
7. *Cyklometrické funkce:* $y = \arcsin x$,$y = \arccos x$,$y = \operatorname{arctg} x$,$y = \operatorname{arccotg} x$. Jsou to funkce inverzní k funkcím goniometrickým. Při jejich definování se musíme omezit na interval, kde jsou goniometrické funkce ryze monotónní.

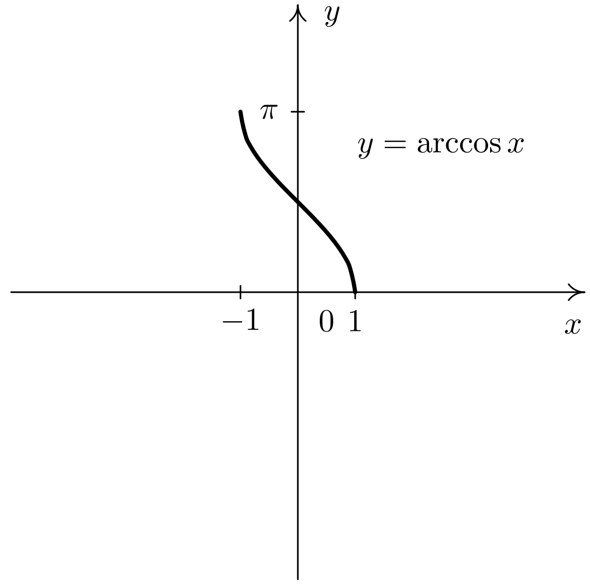
$y = \arcsin x$ přiřazuje každému $x \in \langle -1, 1\rangle$ takové číslo $y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, pro které platí $x = \sin y$.

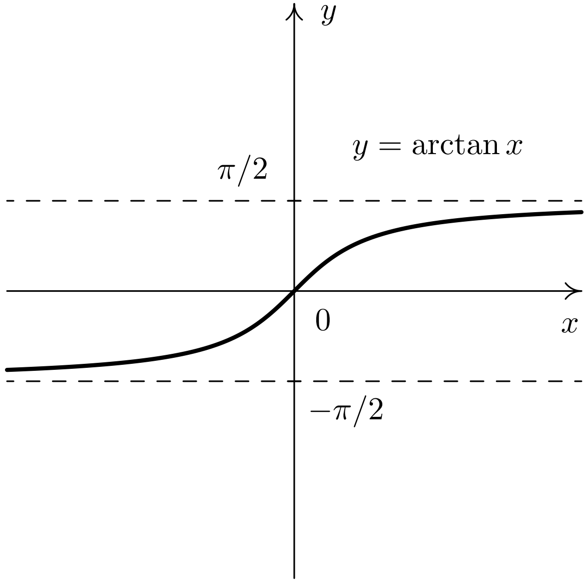
$y = \arccos x$ přiřazuje každému $x \in \langle -1, 1\rangle$ takové číslo $y \in \langle 0, \pi\rangle$, pro které platí $x = \cos y$.

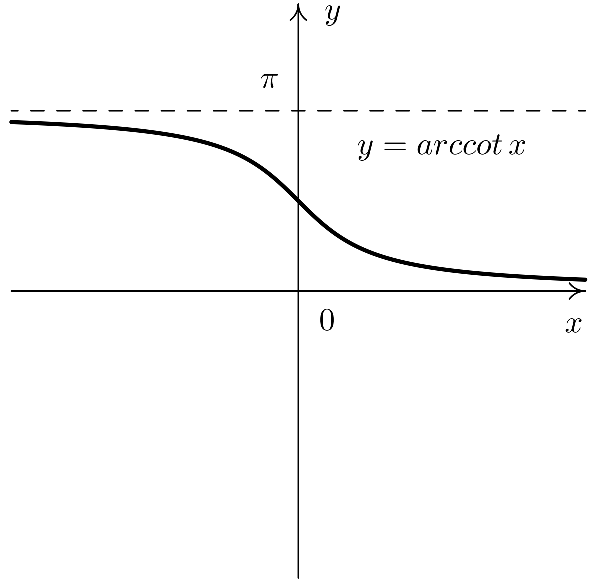
$y = \operatorname{arctg} x$ přiřazuje každému $x \in (-\infty, \infty)$ takové číslo $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, pro které platí $x = \operatorname{tg} y$.

$y = \operatorname{arccotg} x$ přiřazuje každému $x \in (-\infty, \infty)$ takové číslo $y \in (0, \pi)$, pro které platí $x = \operatorname{cotg} y$.


y
y = arcsin x
π/2
−1
0 1
x
−π/2


y
π
y = arccos x
−1
0 1
x


y
y = arctan x
π/2
0
x
−π/2


y
π
y = arccot x
0
x

Úlohy 2.

U všech základních elementárních funkcí urči z grafu definiční obor a vlastnosti funkce - prostá/není prostá, parita, ohraničenost, periodičnost, monotónnost.

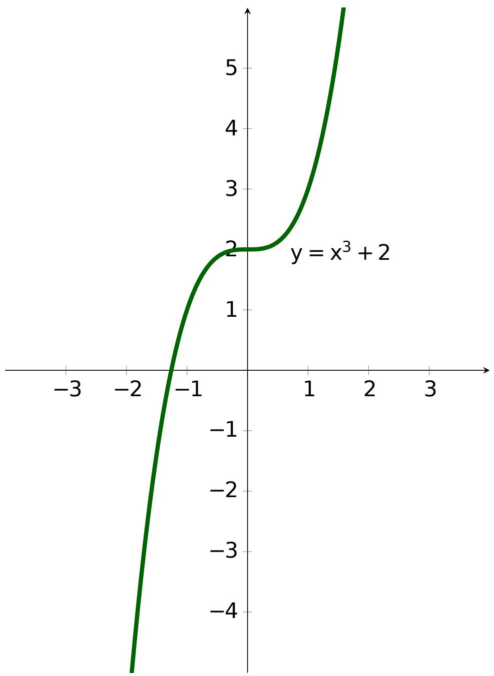
Grafy elementárních funkcí v posunutém tvaru

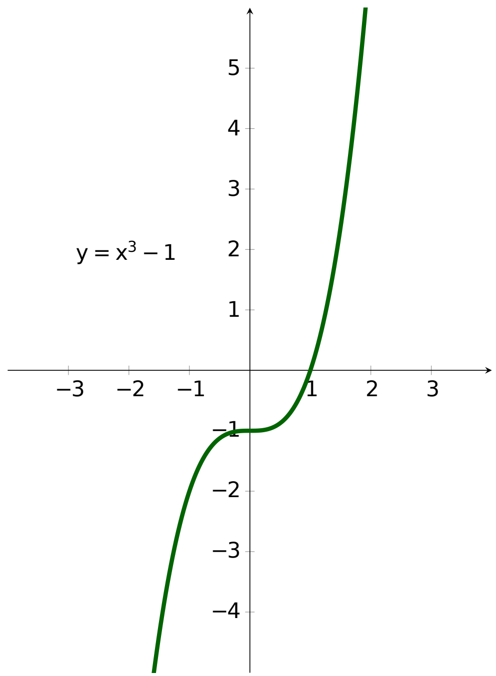
- Přičtení čísla k hodnotě funkce (**posun grafu nahoru**)

$$y = f(x) + c.$$

Odečtení čísla od hodnoty funkce (**posun grafu dolů**)

$$y = f(x) - c.$$



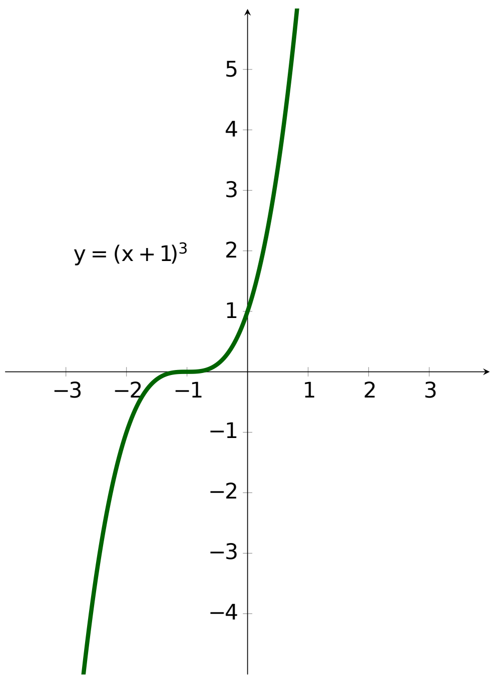


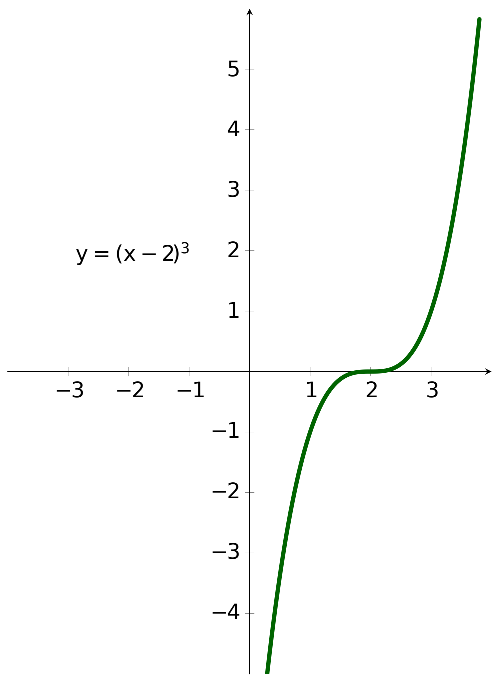
- Přičtení čísla k argumentu funkce (**posun grafu doleva**)

$$y = f(x + c).$$

Odečtení čísla od argumentu funkce (**posun grafu doprava**)

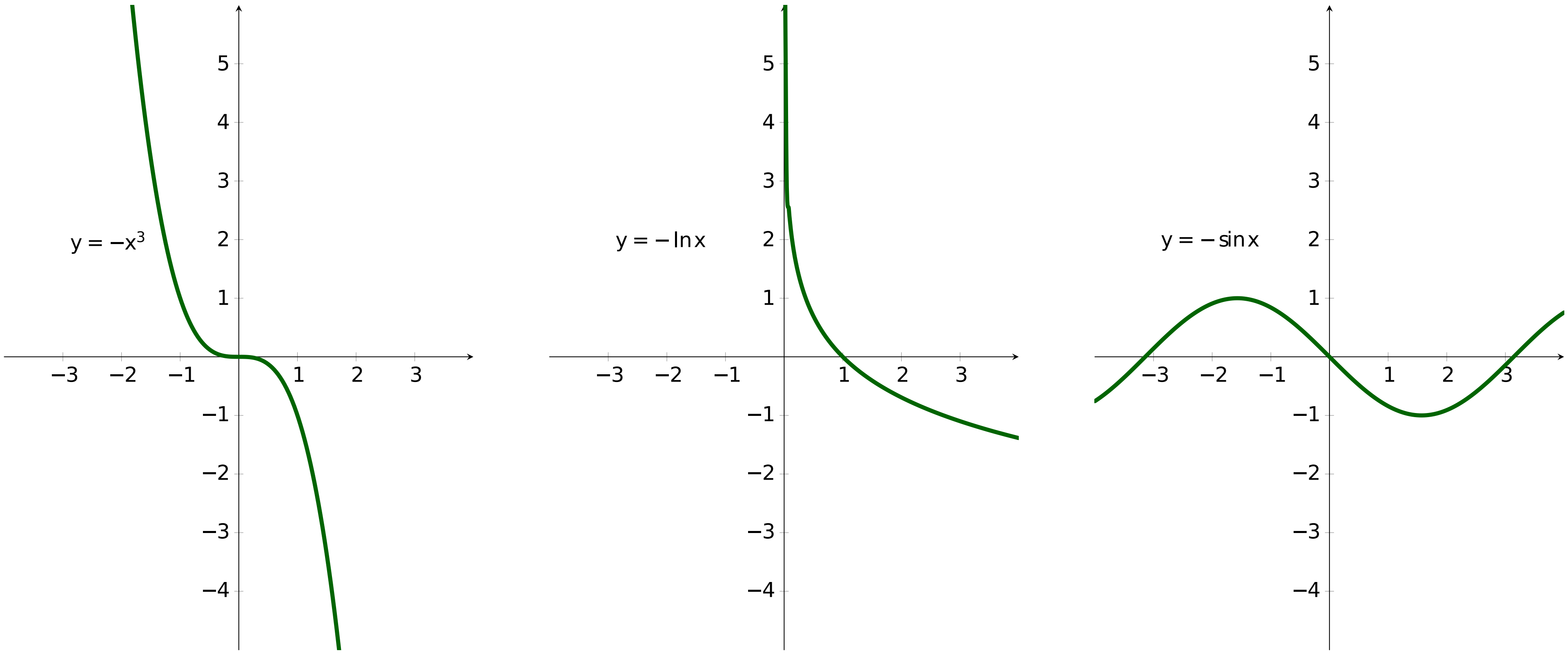
$$y = f(x - c).$$





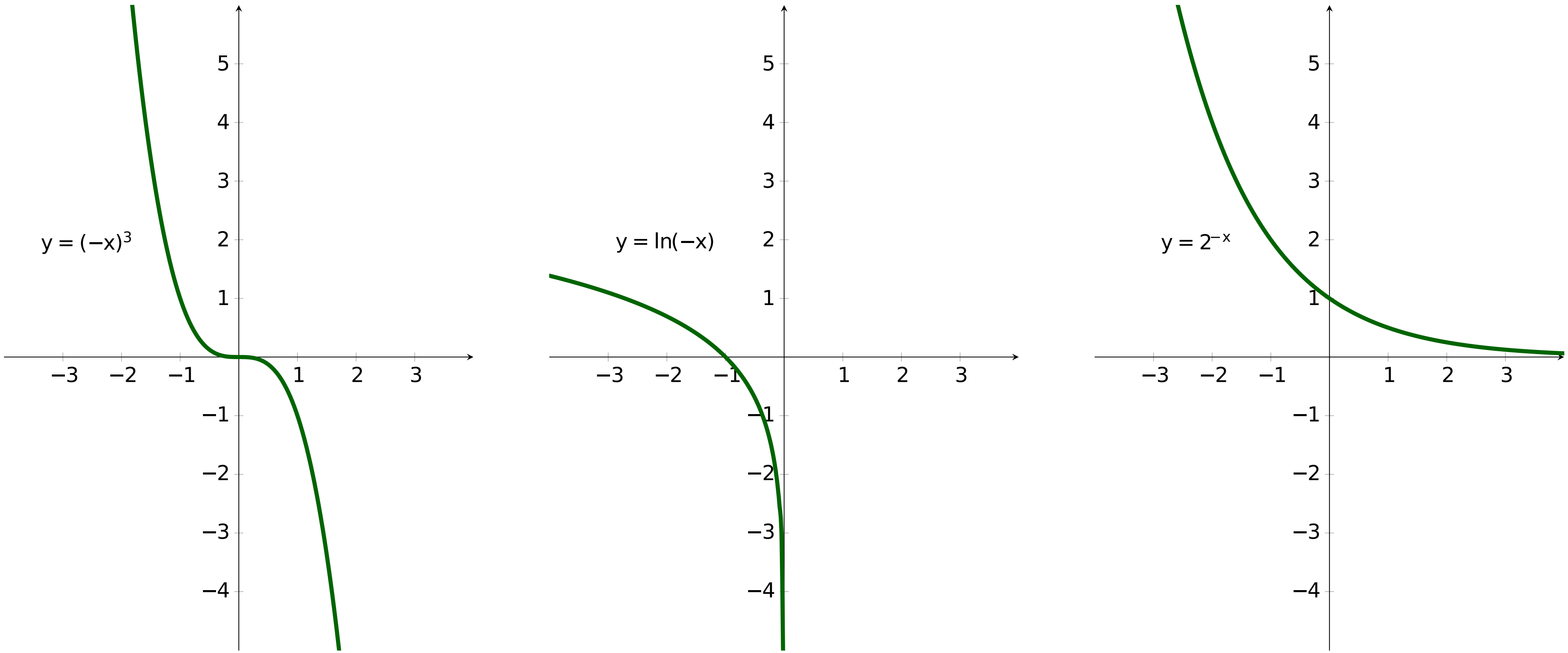
- Záporná hodnota funkce (**překlopení grafu podle osy x**)

$$y = -f(x).$$

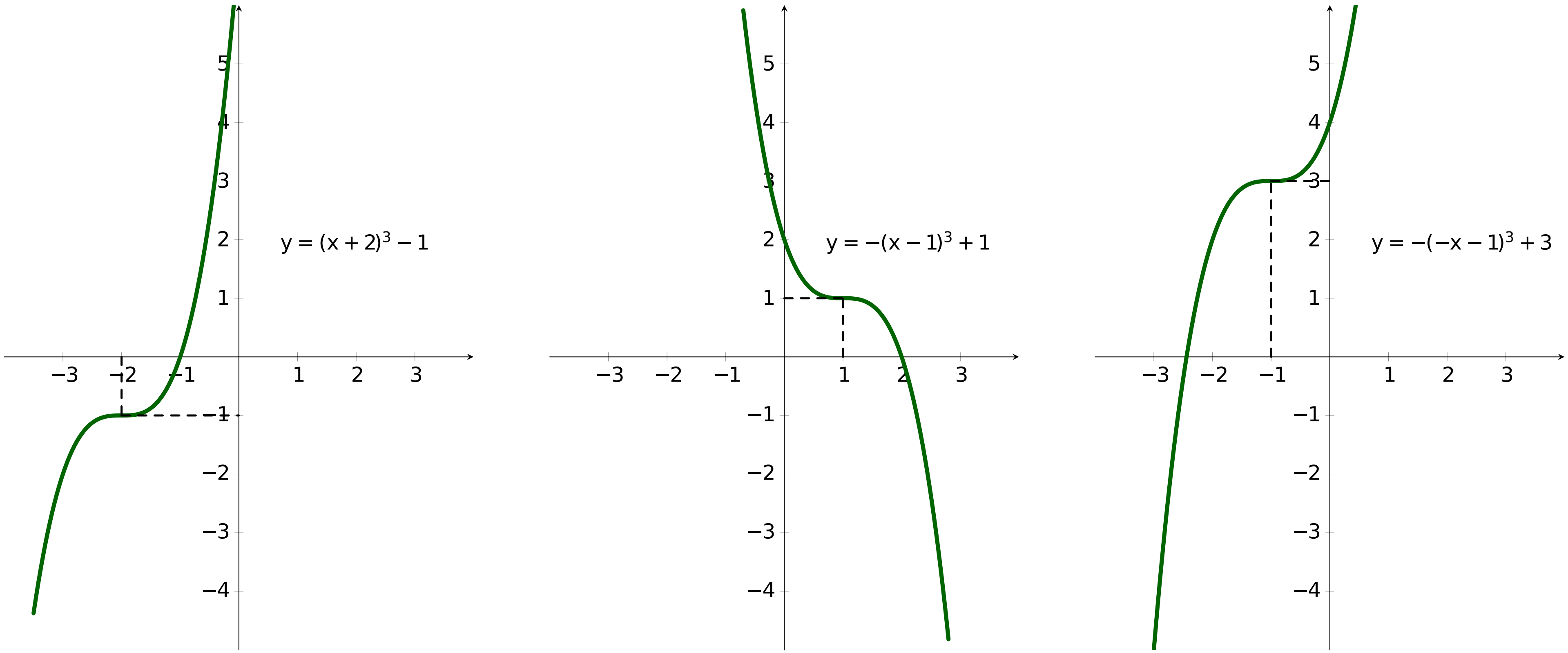


- Záporná hodnota argumentu funkce (**překlopení grafu podle osy y**):

$$y = f(-x).$$



★ Možné kombinace posunutí/překlopení.



Funkce inverzní k dané funkci

DEFINICE (Inverzní funkce). Nechť f je prostá funkce. Funkce f^{-1} se nazývá *funkce inverzní* k funkci f. Funkci f^{-1} získáme tak, že ve všech uspořádaných dvojicích $[x, y] \in f$ zaměníme jejich složky, tzn. že platí

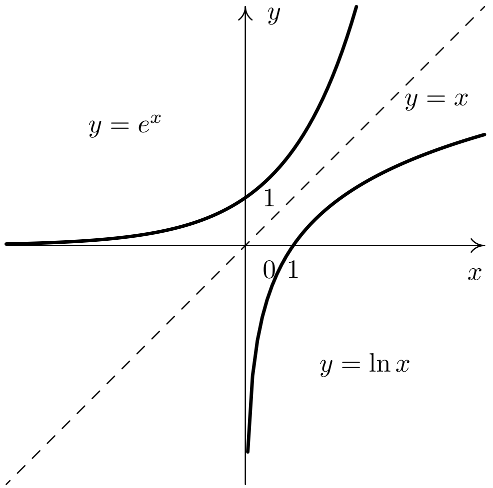
$$D(f) = H(f^{-1}) \qquad \text{a} \qquad H(f) = D(f^{-1}).$$

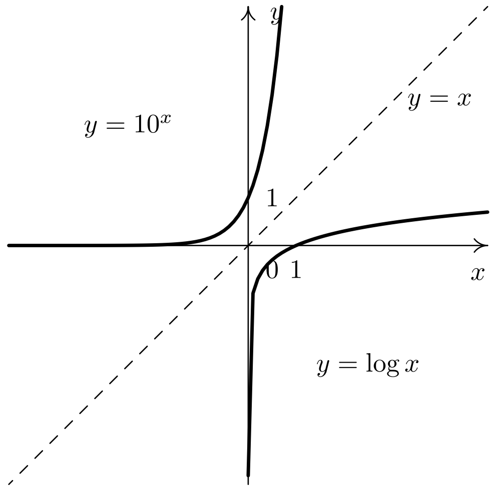
Grafy funkcí f a f^{-1} jsou *osově souměrné* podle přímky $y = x$.
Výpočet inverzní funkce $f^{-1}(x)$ z předpisu $f(x)$: zaměníme x za y a současně y za x. Následně vyjádříme proměnnou y.

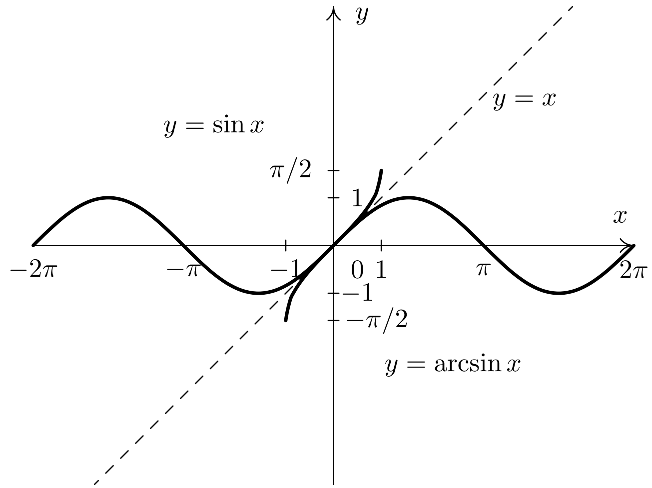
■ Logaritmické a exponenciální funkce jsou navzájem inverzní.

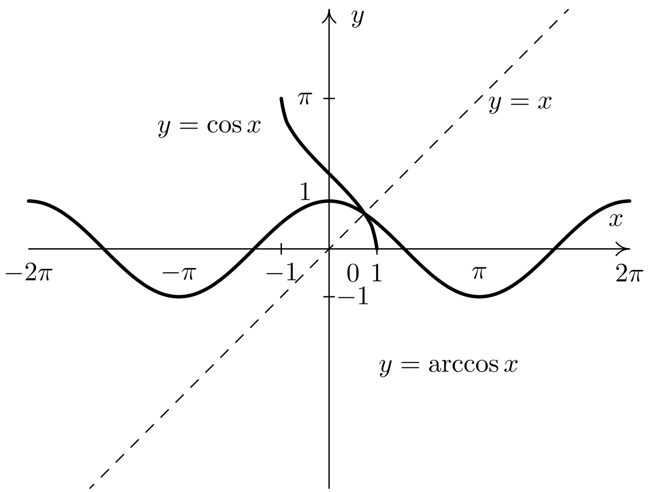
■ Inverzní funkce k funkcím goniometrickým jsou **CYKLOMETRICKÉ**.

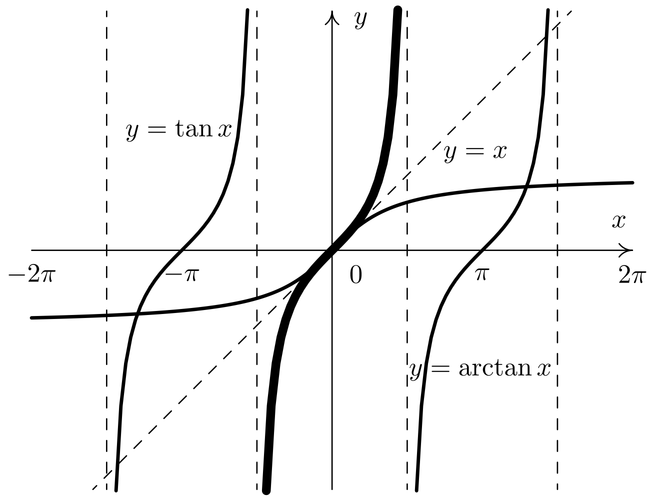
Úlohy 3. Určete inverzní funkci k funkcím:
1. $y = x^3 - 2$ **2.** $y = \log_5 x$ **3.** $y = \mathrm{e}^{x+6}$ **4.** $y = \frac{1}{x+19}$ **5.** $y = \sin x$

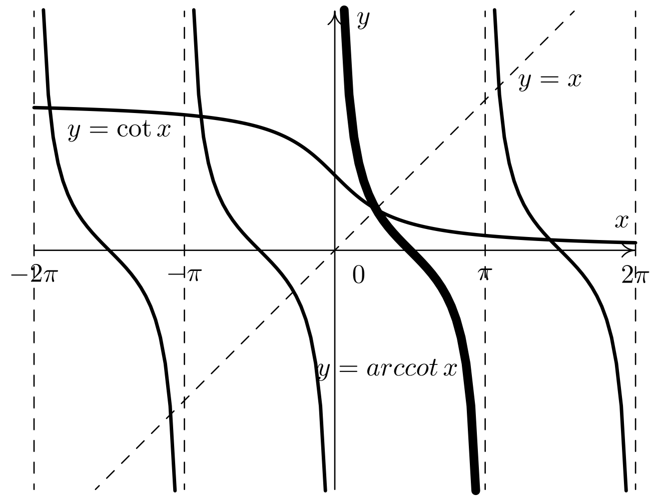

y
$y = x$
$y = e^x$
1
0 1
x
$y = \ln x$


y
$y = x$
$y = 10^x$
1
0 1
x
$y = \log x$


y
$y = x$
$y = \sin x$
$\pi/2$
1
x
-2π
$-\pi$
-1
0 1
π
2π
-1
$-\pi/2$
$y = \arcsin x$


y
π
$y = x$
$y = \cos x$
1
x
-2π
$-\pi$
-1
0 1
π
2π
-1
$y = \arccos x$


y
$y = \tan x$
$y = x$
x
-2π
$-\pi$
0
π
2π
$y = \arctan x$


y
$y = x$
$y = \cot x$
x
-2π
$-\pi$
0
π
2π
$y = arccot\, x$

Operace s funkcemi, funkce složená

Funkce můžeme sčítat, odčítat, násobit a dělit. Vznikne tak například *funkce polynom* a *racionální lomená funkce.*

DEFINICE (Polynom neboli mnohočlen). Funkce

$$y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0$, se nazývá *polynom stupně* n. Čísla $a_0, \ldots, a_n$ se nazývají *koeficienty polynomu* a a_n se nazývá *absolutní člen.*

Příklad.

1. $y = 6 = 6x^0$ ... polynom stupně 0 (konstantní funkce)
2. $y = 10x - 12 = 10x^1 - 12$ ... polynom stupně 1 (lineární funkce)
3. $y = 5x^2 - 3x + 7$ ... polynom stupně 2 (kvadratická funkce)

DEFINICE (Racionální lomená funkce - podíl dvou polynomů). Funkce

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

kde $P_n(x)$ je polynom stupně n a $Q_m(x)$ polynom stupně m, se nazývá *racionální lomená funkce.*

- Je-li $n < m$, pak se funkce nazývá *ryze lomená.*
- Je-li $n \geq m$, pak se funkce nazývá *neryze lomená* a můžeme provést dělení.

Úlohy 4.

Rozhodněte, zda je funkce ryze nebo neryze lomená. U neryze lomených funkcí následně proveďte dělení polynomu polynomem:

1. $y = \frac{x^4+4x^2+3}{x^2+3}$

2. $y = \frac{x^4+4x^2+2+x}{x^2+3}$ (Pozor, nejdříve seřadit členy obou polynomů od největšího stupně po nejmenší!)

3. $y = \frac{2x^3+3x^2+x}{x-1}$

DEFINICE (Kořen polynomu).
Číslo x_0 se nazývá **kořen polynomu** $P(x)$, jestliže

$$P(x_0) = 0$$

(hodnota polynomu v čísle x_0 se rovná nule).

DEFINICE (Kořenový činitel). Když je číslo x_0 kořen polynomu $P(x)$, pak

$$(x - x_0)$$

se nazývá **kořenový činitel**.

Kořeny polynomu mohou být *jednoduché* nebo *vícenásobné*, *reálné* nebo *komplexní*. Každý k-násobný kořen považujeme za k kořenů.

Polynom stupně n má právě n kořenů.

Příklad.

Vypočítejte kořeny polynomů a následně polynomy napište jako součin kořenových činitelů:

1. $P(x) = x^2 - 5x + 6$ **2.** $P(x) = x^2 - x - 20$ **3.** $P(x) = x - 7$

Řešení.

1. $P(x) = x^2 - 5x + 6 = \underline{\underline{(x-2)\cdot(x-3)}}$, $\underline{\underline{x_1 = 2}}$, $\underline{\underline{x_2 = 3}}$

2. $P(x) = x^2 - x - 20 = \underline{\underline{(x-5)\cdot(x+4)}}$, $\underline{\underline{x_1 = 5}}$, $\underline{\underline{x_2 = -4}}$

3. $P(x) = x - 7 = \underline{\underline{(x-7)}}$, $\underline{\underline{x = 7}}$

VĚTA. Celočíselné kořeny polynomu

$$y = P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

kde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, jsou děliteli čísla a_n.

Hodnota polynomu $P(x)$ v nějakém bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, tedy $P(x_0)$

Příklad. Vypočítejte hodnotu polynomu

$$P(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$$

pro $x = 5$, $x = 1$.

Řešení.

$$\begin{aligned} P(5) &= (5)^5 - 3(5)^4 - 5(5)^3 + 15(5)^2 + 4(5) - 12 = \\ &= 3125 - 3 \cdot 625 - 5 \cdot 125 + 15 \cdot 25 + 20 - 12 = \\ &= 3125 - 1875 - 625 + 375 + 20 - 12 = 1008 \\ P(1) &= (1)^5 - 3(1)^4 - 5(1)^3 + 15(1)^2 + 4(1) - 12 = \\ &= 1 - 3 - 5 + 15 + 4 - 12 = 0 \end{aligned}$$

Číslo $x = 1$ je kořen polynomu!

HORNEROVO SCHÉMA

Hornerovo schéma je algoritmus, pomocí kterého můžeme počítat hodnotu polynomu v daném bodě. Pro polynom

$y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ a bod x_0

má Hornerovo schéma tvar tabulky

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
x_0	$b_0 = a_0$	b_1	b_2	$\ldots$	b_{n-1}	$\underline{\underline{b_n = P_n(x_0)}}$,

kde v prvním řádku jsou **všechny** koeficienty polynomu (když nějaký člen polynomu chybí, jeho koeficient je nula). Druhý řádek začíná bodem x_0, ve kterém hodnotu polynomu počítáme. Dále

$$b_i = x_0 \cdot b_{i-1} + a_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Hodnota polynomu v bodě $P_n(x_0)$ je $\mathbf{b_n}$.

Pokud $b_n = 0$, x_0 je kořen a navíc platí

$$P_n(x) = (x - x_0) \cdot (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}).$$

Příklad. Vypočítejte hodnotu polynomu

$$P(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$$

pro $x = 5$, $x = 1$ pomocí HORNEROVA SCHÉMATU.

Řešení.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -3 & -5 & 15 & 4 & -12 \\ \hline 5 & 1 & 2 & 5 & 40 & 204 & \underline{\underline{1008}} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccccc} & 1 & -3 & -5 & 15 & 4 & -12 \\ \hline 1 & 1 & -2 & -7 & 8 & 12 & \underline{\underline{0}} \end{array}$$

$P(5) = 1008$, $P(1) = 0$.

Navíc bod $x = 1$ je kořen a platí

$$P(x) = (x - 1) \cdot (x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12).$$

Úlohy 5. Najděte celočíselné kořeny polynomu:

1. $x^4 - 4x^2 + 9x - 18 = 0$ **2.** $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$

Funkce můžeme skládat. Dosazením libovolné elementární funkce za argument jiné funkce vzniká funkce složená.

DEFINICE (Složená funkce). Nechť f, g jsou dvě funkce. *Složenou funkcí* $g \circ f$ (čteme "g po f") rozumíme funkci definovanou předpisem

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right), \text{ kde } x \in D(f) \text{ a } f(x) \in D(g).$$

Funkce f se nazývá *vnitřní složka* a g *vnější složka* složené funkce $g \circ f$. Složená funkce může mít více složek, např.

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))).$$

Příklad.

Rozložte složené funkce na jednotlivé složky:

1. $y = \sin^2 x = (\sin x)^2 \qquad g = (f)^2,\ f = \sin x.$

2. $y = \log \cos 2x = \log(\cos(2x)) \qquad h = \log g,\ g = \cos f,\ f = 2x.$

3. $y = \sqrt{\mathrm{e}^{x+1}} \qquad h = \sqrt{g},\ g = \mathrm{e}^f,\ f = x + 1.$