MENDELU Agronomická fakulta

Mendelova univerzita v Brně

MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

MATM – MATEMATIKA

DETERMINANT MATICE, SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Mgr. Radka SMÝKALOVÁ, Ph.D.

radka.smykalova@mendelu.cz

Determinant matice

Čtvercová matice (počet řádků m = počet sloupců n) se nazývá *čtvercová matice řádu n.*

DEFINICE (Determinant matice).

Determinant čtvercové matice A řádu n je **reálné číslo**, které je „určitým způsobem" přiřazeno matici A. Píšeme

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Výpočet determinantů matic

- Determinant 1. řádu

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}$$

- Determinant 2. řádu (*křížové pravidlo*)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}) - (a_{12}a_{21})$$

- Determinant 3. řádu (*Sarrusovo pravidlo*)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33}) - (a_{13}a_{22}a_{31})$$

Úlohy 1. Vypočítejte determinanty:

1. $|A| = |-2|$ **2.** $|B| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$ **3.** $|C| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **4.** $|D| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

- Determinant 4. a vyšších řádů (*Laplaceův rozvoj - rozvoj podle libovolného řádku nebo libovolného sloupce*)

Rozvoj podle i-tého řádku:

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in}$$

Rozvoj podle j-tého sloupce:

$$|A| = (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} M_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} M_{nj}$$

M_{ij} je *determinant* řádu $(n-1)$, který vznikne z původního determinantu vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Nejvýhodnější výpočet je rozvoj podle řádku nebo sloupce **s největším počtem nul**!!!

Úlohy 2. Vypočítejte determinanty:

1. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ **2.** $|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -7 & -1 \end{vmatrix}$

Věta (Úprava, která nezmění hodnotu determinantu).
Jestliže k libovolnému řádku matice přičteme libovolný násobek jiného řádku matice, hodnota determinantu se **nezmění**.

Úlohy 3. Vypočítejte determinanty z předchozího cvičení pomocí úpravy, která nezmění hodnotu determinantu. (Upravte si matici do tvaru s více nulami, pak bude výpočet jednodušší.)

Soustavy lineárních rovnic

Úlohy 4. Řešte soustavy lineárních rovnic sčítací metodou.

1. $\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$ **2.** $\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$ **3.** $\begin{aligned} x + y &= 10 \\ 2x + 2y &= 20 \end{aligned}$

DEFINICE (Soustava lineárních rovnic).

Soustavou $\boldsymbol{m}$ *lineárních rovnic o* $\boldsymbol{n}$ *neznámých* nazýváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - neznámé. $a_{ij} \in \mathbb{R}$ - koeficienty.
$b_i \in \mathbb{R}$ - absolutní členy. Když jsou **všechny absolutní členy rovny nule** ($b_i = 0$), soustava se nazývá **homogenní**.

DEFINICE (Matice soustavy). Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se nazývá *matice soustavy.*

DEFINICE (Rozšířená matice soustavy). Matice

$$A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

se nazývá *rozšířená matice soustavy.*

Svislá čára uvnitř matice je pouze značka tam, kde je „rovná se“.

Maticový zápis soustavy m lineárních rovnic o n neznámých:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - vektor neznámých

$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ - vektor absolutních členů rovnice

DEFINICE (Řešení soustavy lineárních rovnic).

Řešení soustavy lineárních rovnic je každá uspořádaná n-tice reálných čísel $c_1, c_2, \ldots, c_n$, kterou když dosadíme za neznámé $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na levých stranách rovnic, tak dostaneme absolutní členy na pravých stranách rovnic.

Počet řešení soustavy lineárních rovnic.

Soustava má

- jedno řešení (jedna uspořádaná n-tice reálných čísel)
- nekonečně mnoho řešení (nekonečně mnoho uspořádaných n-tic reálných čísel)
- žádné řešení (neexistuje n-tice reálných čísel, která vyhovuje rovnicím)

FROBENIOVA VĚTA (Kdy má soustava lineárních rovnic řešení).

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých **má řešení**, když

$$h(A) = h(A_r).$$

Hodnost matice soustavy a hodnost rozšířené matice soustavy se rovnají.

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých **nemá řešení**, když

$$h(A) \neq h(A_r).$$

Hodnost matice soustavy a hodnost rozšířené matice soustavy se nerovnají.

- Když má soustava řešení a $h(A) = h(A_r) = n$ (hodnost se rovná počtu neznámých), pak má soustava **jedno řešení**.
- Když má soustava řešení a $h(A) = h(A_r) < n$ (hodnost je menší než počet neznámých), pak má soustava **nekonečně mnoho řešení**.

Gaussova metoda řešení soustavy

1. rozšířenou matici soustavy A_r převedeme pomocí *ekvivalentních řádkových úprav* na matici schodovitou
2. pomocí Frobeniovy věty zjistíme, zda má soustava řešení a pokud ano, zjistíme, kolik má řešení (jedno nebo nekonečně mnoho)
3. matici ve schodovitém tvaru zpátky přepíšeme do soustavy rovnic a řešíme soustavu *od poslední rovnice k první*

Úlohy 5. Vypočítejte soustavy rovnic:

1.
$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & & -3x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & & -x_3 & +x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +5x_4 & = & -6 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 1 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -3x_4 & = & 2 \\ 5x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -3x_4 & = & 4 \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{rrrrcr} 5x_1 & & +4x_3 & +2x_4 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & -1 \\ 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & -5x_3 & +x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & +x_2 & -4x_3 & +6x_4 & = & -2 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 6 \\ & x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = & 1 \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & +5x_2 & -3x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ x_1 & & +2x_3 & -2x_4 & = & 9 \\ 4x_1 & +10x_2 & -6x_3 & +6x_4 & = & 1 \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 2 \\ 3x_1 & -x_2 & +5x_3 & -3x_4 & -x_5 & = & 6 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & -2x_4 & -3x_5 & = & 8 \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & +3x_2 & +5x_3 & -4x_4 & & = & 1 \\ x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +x_5 & = & -1 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & -x_5 & = & 3 \\ x_1 & -4x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 3 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 & = & -1 \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{rrrrrcr} 2x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +6x_4 & +2x_5 & = & -5 \\ 4x_1 & -x_2 & & -3x_4 & +6x_5 & = & 13 \\ & 2x_2 & +6x_3 & -4x_4 & -13x_5 & = & 10 \\ 2x_1 & +5x_2 & +2x_3 & +2x_4 & -11x_5 & = & 5 \end{array}$$