

● MENDELU
● Agronomická
● fakulta
●

● Mendelova
● univerzita
● v Brně
●

● MENDELU
● Lesnická
● a dřevařská
● fakulta

MATM – MATEMATIKA

DETERMINANT, SOUSTAVY ROVNIC - ŘEŠENÍ ÚLOH

Úlohy 1. Vypočítejte determinanty:

1. $|A| = |-2|$

Řešení. $|A| = |-2| = \underline{\underline{-2}}$

2. $|B| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$

Řešení. $|B| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - (-3) \cdot 4 = -2 + 12 = \underline{\underline{10}}$

3. $|C| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Řešení. $|C| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = ((-1) \cdot (-3) \cdot 1) + (2 \cdot 2 \cdot 3) + (0 \cdot 0 \cdot 0) - (3 \cdot (-3) \cdot 0) - (0 \cdot 2 \cdot (-1)) - (1 \cdot 0 \cdot 2) = (3) + (12) + (0) - (0) - (0) - (0) = 3 + 12 = \underline{\underline{15}}$

4. $|D| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

Řešení. $|D| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = ((-3) \cdot 0 \cdot 2) + (2 \cdot 2 \cdot 4) + (1 \cdot 2 \cdot (-1)) - (4 \cdot 0 \cdot 1) - ((-1) \cdot 2 \cdot (-3)) - (2 \cdot 2 \cdot 2) = (0) + (16) + (-2) - (0) - (6) - (8) =$
 $= 16 - 2 - 6 - 8 = \underline{\underline{0}}$

Úlohy 2. Vypočítejte determinanty:

1. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Řešení. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ rozvoj podle 2. řádku $(-1) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} + (0) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} + (3) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} +$

$+ (4) \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot 48 + 3 \cdot (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 0 = \underline{\underline{48}}$

$$2. |B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Řešení. } |B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -7 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{rozvoj podle 3. řádku}}{=} (2) \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix} + (1) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 30 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 60 - 1 = \underline{\underline{59}}$$

Úlohy 3. Vypočítejte determinanty z předchozího cvičení pomocí úpravy, která nezmění hodnotu determinantu. (Upravte si matici do tvaru s více nulami, pak bude výpočet jednodušší.)

$$1. |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{Řešení. } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{\text{1. řádek přičteme ke 2., 3. a 4. řádku}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \stackrel{\text{rozvoj podle 4. řádku}}{=} (8) \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 \cdot 6 = \underline{\underline{48}}$$

$$2. |B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Řešení. } |B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -7 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{1. řádek přičteme ke 2. řádku}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -7 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{2. řádek přičteme k 1. a 4. řádku}}{=} \begin{vmatrix} -3 & 2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{rozvoj podle 4. sloupce}}{=} \\ = (1) \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 59 = \underline{\underline{59}}$$

Úlohy 4. Řešte soustavy lineárních rovnic sčítací metodou.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{1.} & x + y = 10 & \mathbf{2.} & x + y = 10 \\ & x - y = 2 & & x + y = 2 \\ & & \mathbf{3.} & x + y = 10 \\ & & & 2x + 2y = 20 \end{array}$$

Řešení 1. $(x, y) = (6, 4)$

Řešení 2. nemá řešení

Řešení 3. nekonečně mnoho řešení ve tvaru $(x, y) = (10 - y, y)$, kde $y \in \mathbb{R}$

Úlohy 5. Vypočítejte soustavy rovnic:

$$\mathbf{1.} \quad \begin{array}{cccc} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & & -3x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & & -x_3 & +x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +5x_4 & = & -6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Řešení.} \quad & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \end{array} \right) \text{prohození 2. a 4. řádku} \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \text{prohození 3. a 4. řádku} \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{array} \right) \quad h(A) = 4 = h(A_r) \Rightarrow \text{ má řešení, počet neznámých} = 4 \Rightarrow \text{ má jedno řešení} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 1 & \Rightarrow & x_1 = \frac{1+x_2-x_3+x_4}{2} = 0 \\ 3x_2 & -3x_3 & +6x_4 & & = & -7 & \Rightarrow & x_2 = \frac{-7+3x_3-6x_4}{3} = 2 \\ & & -x_3 & -2x_4 & = & 1 & \Rightarrow & x_3 = -1 - 2x_4 = \frac{5}{3} \\ & & & -3x_4 & = & 4 & \Rightarrow & x_4 = -\frac{4}{3} \end{array}$$

$$\underline{\underline{(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(0, 2, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)}}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ \mathbf{2.} \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{\check{R}\check{e}\check{s}\check{e}\check{n}\check{i}.} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{2. \text{ řádek } \div (-2) \text{ a } 3. \text{ řádek } \cdot (-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$h(A) = 2 = h(A_r) \Rightarrow$ **má řešení**, počet neznámých = 4 \Rightarrow má **nekonečně mnoho** řešení

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \Rightarrow x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 - 2 \cdot \frac{1-4x_3+x_4}{2} - 3x_3 + x_4 = x_3 \\ 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1-4x_3+x_4}{2} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_3, \frac{1-4x_3+x_4}{2}, x_3, x_4 \right), \text{ kde } x_3, x_4 \in \mathbb{R}}}$$

$$\mathbf{3.} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$\mathbf{\check{R}\check{e}\check{s}\check{e}\check{n}\check{i}.} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{4. \text{ řádek } \cdot (-1) \text{ a prohození } 2. \text{ a } 4. \text{ řádku}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -19 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \quad h(A) = 3 \neq 4 = h(A_r) \Rightarrow \mathbf{nemá řešení}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & 5x_1 \quad \quad +4x_3 \quad +2x_4 = 3 \\
 & x_1 \quad +x_2 \quad +2x_3 \quad +x_4 = -1 \\
 & 4x_1 \quad +x_2 \quad +2x_3 \quad \quad = 1 \\
 & x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \quad +x_4 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Řešení.} \quad & \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{prohození 1. a 2. řádku}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{3. a 4. řádek} \cdot (-1) \text{ a prohození 2. a 3. řádku}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 12 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{prohození 3. a 4. řádku}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 11 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 11 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$h(A) = 4 = h(A_r) \Rightarrow \text{ má řešení, } \text{ počet neznámých} = 4 \Rightarrow \text{ má jedno řešení}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 \quad +x_2 \quad +2x_3 \quad +x_4 &= -1 \quad \Rightarrow & x_1 &= -1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\
 3x_2 \quad +6x_3 \quad +4x_4 &= -5 \quad \Rightarrow & x_2 &= \frac{-5 - 6x_3 - 4x_4}{3} = -1 \\
 & x_3 &= -1 \quad \Rightarrow & x_3 &= -1 \\
 & 11x_4 &= 11 \quad \Rightarrow & x_4 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, -1, 1)}}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad & x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -2 \\
 & 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 6x_4 = -2 \\
 & -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\
 & \quad x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Řešení.} \quad & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{prohození 2. a 4. řádku}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{3. \text{ řádek } \div (-18)} \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{array} \right) \quad h(A) = 4 = h(A_r) \Rightarrow \text{ má řešení, počet neznámých} = 4 \Rightarrow \text{ má jedno řešení}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -2 & \Rightarrow x_1 = -2 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = -2 \\
 x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1 & \Rightarrow x_2 = 1 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\
 x_3 - x_4 = 0 & \Rightarrow x_3 = x_4 = 1 \\
 9x_4 = 9 & \Rightarrow x_4 = 1
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2, 2, 1, 1)}}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad & x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \\
 & x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 9 \\
 & 4x_1 + 10x_2 - 6x_3 + 6x_4 = 1
 \end{aligned}$$

$$\text{Řešení.} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 9 \\ 4 & 10 & -6 & 6 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -3 & 9 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$h(A) = 3 \neq 4 = h(A_r) \Rightarrow \text{ nemá řešení}$$

$$\begin{array}{r}
 x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\
 \mathbf{7.} \quad 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6 \\
 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8
 \end{array}$$

$$\mathbf{\check{R}\check{e}\check{s}\check{e}\check{n}\check{i}.} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

$$h(A) = 2 \neq 3 = h(A_r) \Rightarrow \text{ nemá řešení}$$

$$\begin{array}{r}
 x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\
 x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\
 \mathbf{8.} \quad x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\
 x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\
 x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{\check{R}\check{e}\check{s}\check{e}\check{n}\check{i}.} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 1 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{5. řádek} \cdot (-1) \text{ a prohození 2. a 5. řádku} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \\
 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 16 & -12 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 24 & -16 & -8 & 16 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{3. řádek} \div 2 \text{ a 4. řádek} \div 8 \text{ a 5. řádek} \cdot (-1) \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -6 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -6 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -6 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$h(A) = 4 = h(A_r) \Rightarrow \text{ má řešení, počet neznámých} = 5 \Rightarrow \text{ má nekonečně mnoho řešení}$$

$$\begin{array}{r}
 x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 1 - 3 \cdot \frac{-2-x_5}{2} - 5 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{-2-x_5}{2} = -\frac{x_5}{2} \\
 x_2 + 4x_3 - 3x_4 - x_5 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = 2 - 4 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{-2-x_5}{2} + x_5 = \frac{-2-x_5}{2} \\
 8x_3 - 6x_4 - 3x_5 = 6 \Rightarrow x_3 = \frac{6+6x_4+3x_5}{8} = \frac{6+6 \cdot \frac{-2-x_5}{2} + 3x_5}{8} = 0 \\
 -2x_4 - x_5 = 2 \Rightarrow x_4 = \frac{-2-x_5}{2}
 \end{array}$$

$$\underline{\underline{(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{x_5}{2}, \frac{-2-x_5}{2}, 0, \frac{-2-x_5}{2}, x_5 \right), \text{ kde } x_5 \in \mathbb{R}}}$$

$$\begin{aligned}
 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= -5 \\
 4x_1 - x_2 - 3x_4 + 6x_5 &= 13 \\
 2x_2 + 6x_3 - 4x_4 - 13x_5 &= 10 \\
 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 11x_5 &= 5
 \end{aligned}$$

$$\text{Řešení. } \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 0 & -3 & 6 & 13 \\ 0 & 2 & 6 & -4 & -13 & 10 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & -11 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 & 2 & -5 \\ 0 & -7 & 8 & -15 & 2 & 23 \\ 0 & 2 & 6 & -4 & -13 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & -4 & -13 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 & 2 & -5 \\ 0 & -7 & 8 & -15 & 2 & 23 \\ 0 & 2 & 6 & -4 & -13 & 10 \\ 0 & 0 & 58 & -58 & -87 & 116 \end{array} \right)$$

$h(A) = 3 = h(A_r) \Rightarrow$ **má řešení**, počet neznámých = 5 \Rightarrow má **nekonečně mnoho** řešení

$$\begin{aligned}
 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= -5 & \Rightarrow & x_1 = \frac{-5 - 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 - 2x_5}{2} = \frac{-5 - 3 \cdot (-1 - x_4 + 2x_5) + 4 \cdot \left(2 + x_4 + \frac{3x_5}{2}\right) - 6x_4 - 2x_5}{2} = 3 + \frac{x_4}{2} - x_5 \\
 -7x_2 + 8x_3 - 15x_4 + 2x_5 &= 23 & \Rightarrow & x_2 = \frac{23 - 8x_3 + 15x_4 - 2x_5}{-7} = \frac{-23 + 8x_3 - 15x_4 + 2x_5}{-7} = \frac{-23 + 8 \cdot \left(2 + x_4 + \frac{3x_5}{2}\right) - 15x_4 + 2x_5}{-7} = -1 - x_4 + 2x_5 \\
 58x_3 - 58x_4 - 87x_5 &= 116 & \Rightarrow & x_3 = \frac{116 + 58x_4 + 87x_5}{58} = 2 + x_4 + \frac{3x_5}{2}
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(3 + \frac{x_4}{2} - x_5, -1 - x_4 + 2x_5, 2 + x_4 + \frac{3x_5}{2}, x_4, x_5\right), \text{ kde } x_4, x_5 \in \mathbb{R}}}$$