MENDELU Agronomická fakulta

Mendelova univerzita v Brně

MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

MATM – MATEMATIKA

DERIVACE FUNKCE - ŘEŠENÍ ÚLOH

Mgr. Radka SMÝKALOVÁ, Ph.D. radka.smykalova@mendelu.cz

Úlohy 1.
Derivujte:

1. $y = 2\sin x$

Řešení. $(2\sin x)' \overset{P1}{=} 2\cdot(\sin x)' \overset{V7}{=} \underline{\underline{2\cos x}}$

2. $y = 5^x + x^5$

Řešení. $(5^x + x^5)' \overset{P2}{=} (5^x)' + (x^5)' \overset{V4 \text{ a } V2}{=} \underline{\underline{5^x\cdot\ln 5 + 5x^4}}$

3. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$

Řešení. $(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)' \overset{P2}{=} (\operatorname{tg} x)' - (\operatorname{cotg} x)' \overset{V9 \text{ a } V10}{=} \frac{1}{\cos^2 x} - \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}}}$

4. $y = \sqrt{x}\arcsin x$

Řešení. $(\sqrt{x}\arcsin x)' \overset{P3}{=} (\sqrt{x})'\cdot(\arcsin x) + (\sqrt{x})\cdot(\arcsin x)' = (x^{\frac{1}{2}})'\cdot(\arcsin x) + (\sqrt{x})\cdot(\arcsin x)' \overset{V2 \text{ a } V11}{=} \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\arcsin x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\arcsin x + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}}}$

5. $y = \frac{e^x}{\cos x}$

Řešení. $\left(\frac{e^x}{\cos x}\right)' \overset{P4}{=} \frac{(e^x)'\cdot(\cos x) - (e^x)\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} \overset{V3 \text{ a } V8}{=} \frac{e^x\cdot\cos x - e^x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{e^x\cdot\cos x + e^x\cdot\sin x}{\cos^2 x}}}$

6. $y = \sin x(x^3 - 13)$

Řešení. $\big(\sin x\cdot(x^3-13)\big)' \overset{P3}{=} (\sin x)'\cdot(x^3-13) + (\sin x)\cdot(x^3-13)' \overset{V7 \text{ a } P2}{=} \cos x\cdot(x^3-13) + \sin x\cdot((x^3)' - (13)') = \underline{\underline{\cos x\cdot(x^3-13) + \sin x\cdot(3x^2-0)}}$

7. $y = \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{x^2+x-9}$

Řešení. $\left(\frac{x^2\operatorname{arctg} x}{x^2+x-9}\right)' \overset{P4}{=} \frac{(x^2\cdot\operatorname{arctg} x)'\cdot(x^2+x-9) - (x^2\operatorname{arctg} x)\cdot(x^2+x-9)'}{(x^2+x-9)^2} \overset{P3 \text{ a } P2}{=} \frac{((x^2)'\cdot(\operatorname{arctg} x) + (x^2)\cdot(\operatorname{arctg} x)')\cdot(x^2+x-9) - (x^2\operatorname{arctg} x)\cdot((x^2)' + (x)' - (9)')}{(x^2+x-9)^2} \overset{V2 \text{ a } V13 \text{ a } V2 \text{ a } V2 \text{ a } V1}{=}$
$= \frac{\left(2x\cdot\operatorname{arctg} x + x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot(x^2+x-9) - (x^2\operatorname{arctg} x)\cdot(2x+1-0)}{(x^2+x-9)^2} = \underline{\underline{\frac{\left(2x\cdot\operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{1+x^2}\right)\cdot(x^2+x-9) - (x^2\operatorname{arctg} x)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-9)^2}}}$

8. $y = \sqrt[3]{x^4}\cdot\ln x\cdot\operatorname{arccotg} x$

Řešení. Zvolíme se jeden součin (je jedno jaký) a podle něho uděláme pravidlo.
$\left(\underline{\sqrt[3]{x^4}\cdot\ln x}\cdot\underline{\operatorname{arccotg} x}\right)' \overset{P3}{=} (\sqrt[3]{x^4}\cdot\ln x)'\cdot(\operatorname{arccotg} x) + (\sqrt[3]{x^4}\cdot\ln x)\cdot(\operatorname{arccotg} x)' \overset{P3 \text{ a } V14}{=} ((\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}})'\cdot(\ln x) + (\sqrt[3]{x^4})\cdot(\ln x)')\cdot\operatorname{arccotg} x + \sqrt[3]{x^4}\cdot\ln x\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right) =$
$\overset{V2 \text{ a } V5}{=} \left(\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\cdot\ln x + \sqrt[3]{x^4}\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot\operatorname{arccotg} x - \sqrt[3]{x^4}\cdot\ln x\cdot\frac{1}{1+x^2} = \underline{\underline{\left(\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\cdot\ln x + \sqrt[3]{x^4}\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot\operatorname{arccotg} x - \frac{\sqrt[3]{x^4}\cdot\ln x}{1+x^2}}}$

Úlohy 2. (Derivace složené funkce)
Derivujte:

1. $y = \sin x^2 = \sin(x^2)$

Řešení. Víme, že derivujeme postupně *jednotlivé složky* a mezi nimi píšeme *násobení.*

$\left(\sin(x^2)\right)' \overset{V7 \text{ a } V2}{=} \underline{\underline{\cos(x^2)\cdot 2x}}$

2. $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$

Řešení. Víme, že derivujeme postupně *jednotlivé složky* a mezi nimi píšeme *násobení.*

$\left((\sin x)^2\right)' \overset{V2 \text{ a } V7}{=} \underline{\underline{2\sin x\cdot\cos x}}$

3. $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x^3}$

Řešení. Víme, že derivujeme postupně *jednotlivé složky* a mezi nimi píšeme *násobení.*

$\left(\sqrt{\operatorname{arctg} x^3}\right)' = \left(\left(\operatorname{arctg} x^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)' \overset{V2 \text{ a } V13 \text{ a } V2}{=} \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x^3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1+(x^3)^2}\cdot 3x^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x^3}}\cdot\frac{3x^2}{1+x^6}}}$

4. $y = \ln\cos \mathrm{e}^{x^6} = \ln(\cos(\mathrm{e}^{(x^6)}))$

Řešení. Víme, že derivujeme postupně *jednotlivé složky* a mezi nimi píšeme *násobení.*

$\left(\ln(\cos(\mathrm{e}^{(x^6)}))\right)' \overset{V5 \text{ a } V8 \text{ a } V3 \text{ a } V2}{=} \frac{1}{\cos(\mathrm{e}^{(x^6)})}\cdot(-\sin(\mathrm{e}^{(x^6)}))\cdot\mathrm{e}^{(x^6)}\cdot 6x^5 = \underline{\underline{-\frac{1}{\cos\mathrm{e}^{x^6}}\cdot\sin\mathrm{e}^{x^6}\cdot\mathrm{e}^{x^6}\cdot 6x^5}}$

5. $y = (\sin\sqrt{\ln x})^5$

Řešení. Víme, že derivujeme postupně *jednotlivé složky* a mezi nimi píšeme *násobení.*

$\left((\sin\sqrt{\ln x})^5\right)' = \left((\sin(\ln x)^{\frac{1}{2}})^5\right)' \overset{V2 \text{ a } V7 \text{ a } V2 \text{ a } V5}{=} 5\left(\sin(\ln x)^{\frac{1}{2}}\right)^4\cdot\cos(\ln x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x} = \underline{\underline{5\left(\sin\sqrt{\ln x}\right)^4\cdot\cos\sqrt{\ln x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}}}$

6. $y = 10^{x^4}$

Řešení. Víme, že derivujeme postupně *jednotlivé složky* a mezi nimi píšeme *násobení.*

$\left(10^{x^4}\right)' \overset{V4 \text{ a } V2}{=} \underline{\underline{10^{x^4}\ln 10\cdot 4x^3}}$

Úlohy 3. (Derivace vyšších řádů)
Vypočítejte derivaci druhého řádu:

1. $y = x^3 + x^2 + x - 1$

Řešení. Víme, že derivaci druhého řádu, neboli druhou derivaci, vypočítáme tak, že funkci zderivujeme nejdříve jednou. A následně funkci, která nám vyjde, zderivujeme ještě jednou.

$$y' = \left(x^3 + x^2 + x - 1\right)' \stackrel{P2}{=} (x^3)' + (x^2)' + (x)' - (1)' \stackrel{V2 \text{ a } V2 \text{ a } V2 \text{ a } V1}{=} \underline{3x^2 + 2x + 1 - 0}$$

$$y'' = \left(3x^2 + 2x + 1\right)' \stackrel{P2}{=} (3x^2)' + (2x)' + (1)' \stackrel{P1 \text{ a } P1 \text{ a } V1}{=} 3 \cdot (x^2)' + 2 \cdot (x)' + 0 \stackrel{V2 \text{ a } V2}{=} 3 \cdot 2x + 2 \cdot 1 = \underline{\underline{6x + 2}}$$

2. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

Řešení. Víme, že derivaci druhého řádu, neboli druhou derivaci, vypočítáme tak, že funkci zderivujeme nejdříve jednou. A následně funkci, která nám vyjde, zderivujeme ještě jednou.

$$y' = \left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)' \stackrel{P4}{=} \frac{(x^2)'\cdot(x^2-1)-(x^2)\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} \stackrel{V2 \text{ a } P2}{=} \frac{2x\cdot(x^2-1)-x^2\cdot((x^2)'-(1)')}{(x^2-1)^2} \stackrel{V2 \text{ a } V1}{=} \frac{2x\cdot(x^2-1)-x^2\cdot(2x-0)}{(x^2-1)^2} \stackrel{\text{roznásobit}}{=} \frac{2x^3-2x-2x^3}{(x^2-1)^2} = \underline{\frac{-2x}{(x^2-1)^2}}$$

$$y'' = \left(\frac{-2x}{(x^2-1)^2}\right)' \stackrel{P4}{=} \frac{(-2x)'\cdot((x^2-1)^2)-(-2x)\cdot((x^2-1)^2)'}{((x^2-1)^2)^2} = \frac{(-2x)'\cdot(x^2-1)^2+2x\cdot((x^2-1)^2)'}{(x^2-1)^4} \stackrel{P1 \text{ a derivace složené funkce - } ()^2 \text{ je vnější složka a } (x^2-1) \text{ je vnitřní složka}}{=}$$

$$= \frac{-2(x)'\cdot(x^2-1)^2+2x\cdot(2(x^2-1)^1\cdot(2x-0))}{(x^2-1)^4} \stackrel{V2}{=} \frac{-2\cdot1\cdot(x^2-1)^2+2x\cdot(2(x^2-1)\cdot2x)}{(x^2-1)^4} = \frac{-2(x^2-1)^2+8x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4} \stackrel{\text{v čitateli vytkneme } (x^2-1)}{=} \frac{(x^2-1)\cdot\left(-2(x^2-1)+8x^2\right)}{(x^2-1)^4} \stackrel{\text{zkrátíme čitatel a jmenovatel}}{=}$$

$$= \frac{-2(x^2-1)+8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{-2x^2+2+8x^2}{(x^2-1)^3} = \underline{\underline{\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}}}$$

Úlohy 4.

Derivujte:

1. $y=\sqrt{6x^2+5x-9}$

Řešení. $\left(\sqrt{6x^2+5x-9}\right)' = \left((6x^2+5x-9)^{\frac12}\right)' \stackrel{\text{derivace složené funkce - }()^{\frac12}\text{ je vnější složka a }(6x^2+5x-9)\text{ je vnitřní složka}}{=} \frac12(6x^2+5x-9)^{-\frac12}\cdot(6\cdot 2x+5-0) =$

$= \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{6x^2+5x-9}}\cdot(12x+5)}}$

2. $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$

Řešení. $\left(\ln\frac{1-x}{1+x}\right)' \stackrel{\text{derivace složené funkce - ln je vnější složka a }\frac{1-x}{1+x}\text{ neboli zlomek - pravidlo P4 - je vnitřní složka}}{=} \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{(1-x)'\cdot(1+x)-(1-x)\cdot(1+x)'}{(1+x)^2} \stackrel{P2\text{ a }P2}{=}$

$= \frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{((1)'-(x)')\cdot(1+x)-(1-x)\cdot((1)'+(x)')}{(1+x)^2} \stackrel{V1\text{ a }V2\text{ a }V1\text{ a }V2}{=} \frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{(0-1)\cdot(1+x)-(1-x)\cdot(0+1)}{(1+x)^2} = \frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{-1\cdot(1+x)-(1-x)\cdot1}{(1+x)^2} = \frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} \stackrel{\text{krácení do kříže}}{=} \underline{\underline{\frac{1}{1-x}\cdot\frac{-2}{1+x}}}$

3. $y=\cos^2\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

Řešení. $\left(\cos^2\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\left(\cos\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)^2\right)' \stackrel{\text{derivace složené funkce - }()^2\text{ je vnější složka, cos je prostřední složka a }\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\text{ neboli zlomek - pravidlo P4 - je vnitřní složka}}{=}$

$= 2\left(\cos\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)^1\cdot\left(-\sin\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{(\sqrt{x}+1)'\cdot(\sqrt{x})-(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = -2\cos\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\cdot\sin\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{(x^{\frac12}+1)'\cdot(\sqrt{x})-(\sqrt{x}+1)\cdot(x^{\frac12})'}{(\sqrt{x})^2} \stackrel{P2\text{ a }V2}{=}$

$= -2\cos\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\cdot\sin\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\left((x^{\frac12})'+(1)'\right)\cdot(\sqrt{x})-(\sqrt{x}+1)\cdot(\frac12x^{-\frac12})}{(\sqrt{x})^2} \stackrel{V2\text{ a }V1}{=} -2\cos\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\cdot\sin\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\left(\frac12x^{-\frac12}+0\right)\cdot(\sqrt{x})-(\sqrt{x}+1)\cdot(\frac12x^{-\frac12})}{(\sqrt{x})^2} = \underline{\underline{-2\cos\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\cdot\sin\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-(\sqrt{x}+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}}}$

4. $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x}$

Řešení. $\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x}\right)' \stackrel{P4}{=} \frac{(\sqrt{1-x^2})'\cdot(\arcsin x)-(\sqrt{1-x^2})\cdot(\arcsin x)'}{(\arcsin x)^2} \stackrel{V11}{=} \frac{\left((1-x^2)^{\frac12}\right)'\cdot(\arcsin x)-(\sqrt{1-x^2})\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2} \stackrel{\text{derivace složené funkce - }()^{\frac12}\text{ je vnější složka a }(1-x^2)\text{ je vnitřní složka}}{=}$

$\frac{\left(\frac12(1-x^2)^{-\frac12}\cdot(0-2x)\right)\cdot(\arcsin x)-(\sqrt{1-x^2})\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\right)\cdot\arcsin x-(\sqrt{1-x^2})\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2} = \underline{\underline{\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\arcsin x-1}{(\arcsin x)^2}}}$

5. $y=\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt3}{1-x^5}$

Řešení. $\left(\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt3}{1-x^5}\right)' \stackrel{P1}{=} \frac{1}{\sqrt3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt3}{1-x^5}\right)' \stackrel{\text{derivace složené funkce - arctg je vnější složka a }\frac{x\sqrt3}{1-x^5}\text{ neboli zlomek - pravidlo P4 - je vnitřní složka}}{=}$

$= \frac{1}{\sqrt3}\frac{1}{1+\left(\frac{x\sqrt3}{1-x^5}\right)^2}\cdot\frac{(x\sqrt3)'\cdot(1-x^5)-(x\sqrt3)\cdot(1-x^5)'}{(1-x^5)^2} \stackrel{P1\text{ a }P2}{=} \frac{1}{\sqrt3}\frac{1}{1+\left(\frac{x\sqrt3}{1-x^5}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt3(x)'\cdot(1-x^5)-(x\sqrt3)\cdot((1)'-(x^5)')}{(1-x^5)^2} \stackrel{V2\text{ a }V1\text{ a }V2}{=} \frac{1}{\sqrt3}\frac{1}{1+\left(\frac{x\sqrt3}{1-x^5}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt3\cdot1\cdot(1-x^5)-(x\sqrt3)\cdot(0-5x^4)}{(1-x^5)^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt3}\frac{1}{1+\left(\frac{x\sqrt3}{1-x^5}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt3(1-x^5)-x\sqrt3\cdot(-5x^4)}{(1-x^5)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt3}\frac{1}{1+\left(\frac{x\sqrt3}{1-x^5}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt3(1-x^5)+5x^5\sqrt3}{(1-x^5)^2}}}$

6. $y = 3x^3 \arcsin x + (x^2+2)\sqrt{1-x^2}$

Řešení. $\left(3x^3 \arcsin x + (x^2+2)\sqrt{1-x^2}\right)' \overset{P2}{=} \left(3x^3 \arcsin x\right)' + \left((x^2+2)\sqrt{1-x^2}\right)' \overset{P1 \text{ a } P3}{=} 3\left(x^3 \arcsin x\right)' + (x^2+2)' \cdot (\sqrt{1-x^2}) + (x^2+2) \cdot (\sqrt{1-x^2})' \overset{P3 \text{ a } P2}{=}$

$= 3\left((x^3)' \cdot (\arcsin x) + (x^3) \cdot (\arcsin x)'\right) + ((x^2)' + (2)') \cdot (\sqrt{1-x^2}) + (x^2+2) \cdot \left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' =$

$\overset{V2 \text{ a } V11 \text{ a } V2 \text{ a } V1 \text{ a derivace složené funkce - } ()^{\frac{1}{2}} \text{ je vnější složka a } (1-x^2) \text{ je vnitřní složka}}{=}$

$= 3\left(3x^2 \cdot \arcsin x + x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + (2x+0) \cdot \sqrt{1-x^2} + (x^2+2) \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (0-2x) = \underline{\underline{9x^2 \cdot \arcsin x + \frac{3x^3}{\sqrt{1-x^2}} + 2x\sqrt{1-x^2} + (x^2+2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)}}$