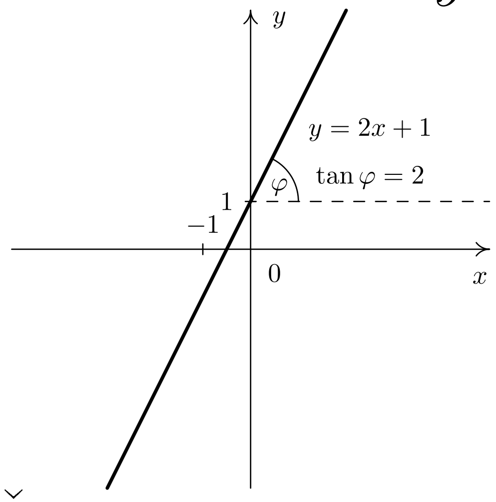
MATM – MATEMATIKA

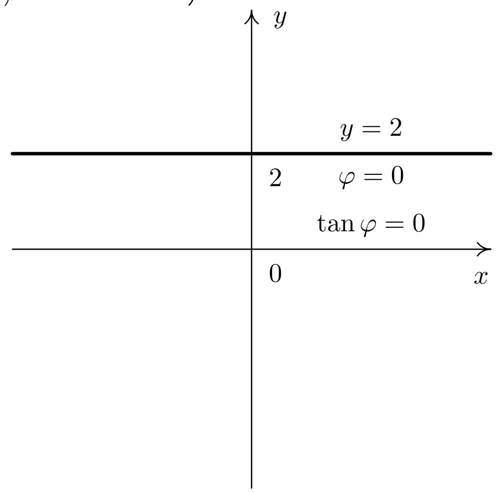
$\boxed{\text{DERIVACE FUNKCE}}$

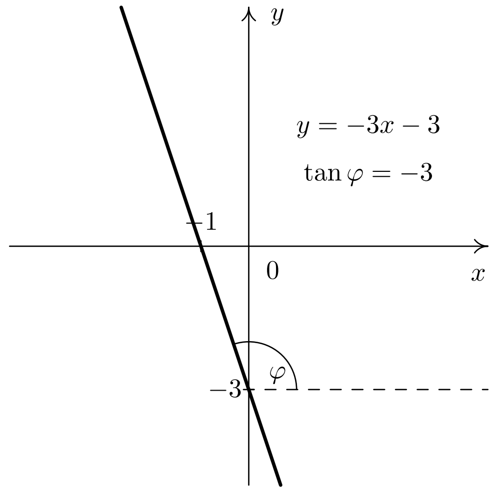
Mgr. Radka SMÝKALOVÁ, Ph.D. radka.smykalova@mendelu.cz

Derivace a její geometrický význam

Lineární funkce: $y = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$







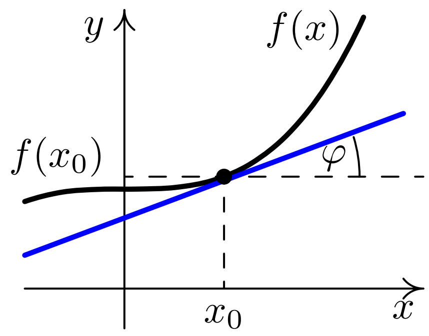
Číslu a říkáme *směrnice* přímky a je určena vztahem

$$a = \operatorname{tg} \varphi.$$

φ je úhel, který tato přímka svírá s kladným směrem osy x.
Přímka je dána buď dvěma body nebo jedním bodem $[x_0, f(x_0)]$ a úhlem φ.
V tomto případě má přímka rovnici

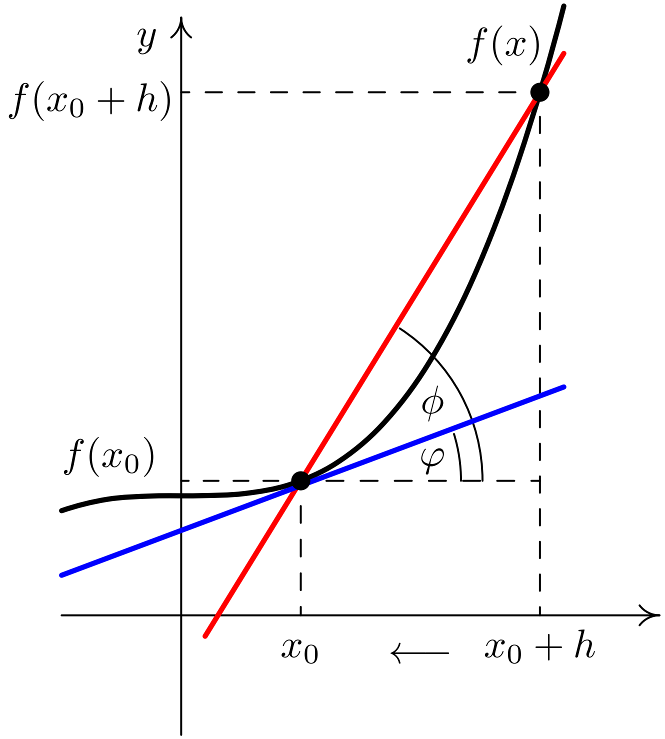
$$y = a \cdot (x - x_0) + f(x_0), \qquad \text{kde } a = \operatorname{tg} \varphi.$$

__Příklad__. Napište rovnici tečny funkce $f(x)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$.
(Tečna funkce - přímka, která se dotýká funkce v jednom bodě $[x_0, f(x_0)]$.)



Řešení. Tečna má rovnici $y = a \cdot (x - x_0) + f(x_0)$, kde $a = \operatorname{tg} \varphi$. My však úhel φ neznáme, tedy nemůžeme vypočítat směrnici a.

Zvolíme si ještě jeden bod na funkci a sestrojíme sečnu funkce v bodech $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0+h, f(x_0+h)]$ (přímku, která těmito dvěma body prochází). Reálné číslo h si zvolíme libovolně.



Směrnice sečny je

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

(z pravoúhlého trojúhelníku $\operatorname{tg}\phi = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}}$).

Když se bude bod $x_0 + h$ blížit k bodu x_0, což znamená, že h se bude blížit k nule, tak tato *sečna* přejde postupně v *tečnu* v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Směrnici tečny v bodě $[x_0, f(x_0)]$ tedy můžeme vyjádřit *pomocí limity*

$$a = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

(Této limitě, pokud existuje, budeme říkat derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0.)

DEFINICE (Derivace v bodě). $f(x)$ je funkce a $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

nazýváme ji *derivace funkce* $f(x)$ *v bodě* x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.

Když označíme $x = x_0 + h$, můžeme vyjádřit předchozí definici ve tvaru

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Geometrický význam derivace. Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0, čili $f'(x_0)$, je směrnice tečny funkce $f(x)$ v tomto bodě x_0.

Tečna ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je přímka, která má rovnici

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Fyzikální význam derivace. Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0, čili $f'(x_0)$, vyjadřuje *okamžitou rychlost změny* funkční hodnoty funkce f v bodě x_0.

To znamená, je-li $f'(x_0) = c \in \mathbb{R}$, potom na jednu jednotku změny hodnoty nezávisle proměnné x připadá c jednotek změny závisle proměnné y.

- Okamžitá rychlost v čase t_0 je derivací dráhy podle času
$$v(t_0) = s'(t_0).$$
- Okamžité zrychlení v čase t_0 je derivací rychlosti podle času
$$a(t_0) = v'(t_0).$$
- **Jestliže je veličina m funkcí času t, pak *okamžitá změna* v této veličiny m v čase t_0 je dána derivací**
$$v(t_0) = m'(t_0).$$

VĚTA (Vztah mezi derivací v bodě x_0 a spojitostí v bodě x_0).
Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 *derivaci*, pak je v tomto bodě *spojitá*.

DEFINICE (Derivace jako funkce). Má-li funkce $f(x)$ derivaci ve *všech bodech množiny* M, pak definujeme na této množině funkci, která každému bodu z M přiřadí derivaci v tomto bodě. Tato funkce se nazývá *derivace funkce* $f(x)$ a značí se $f'(x)$. (Jiné značení: y', $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.)

Pravidla pro derivování

u, v jsou funkce, $c \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$P1 \qquad (c \cdot u)' = c \cdot (u)'$$

$$P2 \qquad (u \pm v)' = (u)' \pm (v)'$$

$$P3 \qquad (u \cdot v)' = (u)' \cdot (v) + (u) \cdot (v)'$$

$$P4 \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{(u)' \cdot (v) - (u) \cdot (v)'}{v^2}, \quad \text{kde } v \neq 0.$$

Vzorce pro derivování

$c \in \mathbb{R}$. Pak platí

$V1$ $\quad (c)' = 0$

$V2$ $\quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$V3$ $\quad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

$V4$ $\quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$V5$ $\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$V6$ $\quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$V7$ $\quad (\sin x)' = \cos x$

$V8$ $\quad (\cos x)' = -\sin x$

$V9$ $\quad (\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$V10$ $\quad (\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$V11$ $\quad (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$V12$ $\quad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$V13$ $\quad (\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$V14$ $\quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Úlohy 1.

Derivujte:

1. $y = 2\sin x$ **2.** $y = 5^x + x^5$ **3.** $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$ **4.** $y = \sqrt{x}\arcsin x$

5. $y = \frac{\mathrm{e}^x}{\cos x}$ **6.** $y = \sin x(x^3 - 13)$ **7.** $y = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{x^2 + x - 9}$ **8.** $y = \sqrt[3]{x^4} \cdot \ln x \cdot \operatorname{arccotg} x$

Derivace složené funkce

Pro složenou funkci platí

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Derivujeme postupně *jednotlivé složky* a mezi nimi píšeme *násobení*.
Podobně $(h(g(f(x))))' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Úlohy 2.

Derivujte:

1. $y = \sin x^2 = \sin(x^2)$ **2.** $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ **3.** $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x^3}$

4. $y = \ln\cos \mathrm{e}^{x^6} = \ln(\cos(\mathrm{e}^{(x^6)}))$ **5.** $y = (\sin\sqrt{\ln x})^5$ **6.** $y = 10^{x^4}$

Derivace vyšších řádů

DEFINICE (Druhá derivace, třetí derivace, ...).
Druhou derivací funkce $f(x)$ rozumíme funkci

$$f''(x) = (f'(x))',$$

tj. derivaci první derivace.
Obecně n-tou derivací funkce $f(x)$ rozumíme funkci $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Úlohy 3.
Vypočítejte derivaci druhého řádu:
1. $y = x^3 + x^2 + x - 1$ **2.** $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

Úlohy 4.

Derivujte:

1. $y=\sqrt{6x^2+5x-9}$ **2.** $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$ **3.** $y=\cos^2\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ **4.** $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x}$

5. $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^5}$ **6.** $y=3x^3\arcsin x+(x^2+2)\sqrt{1-x^2}$

Příklad. Určete derivaci funkce $y=\frac{1-2x}{x^3}$ v bodě $x_0=-1$.

Řešení.

$$y'=\left(\frac{1-2x}{x^3}\right)'=\frac{(1-2x)'x^3-(1-2x)(x^3)'}{(x^3)^2}=\frac{-2x^3-(1-2x)3x^2}{x^6}=$$

$$=\frac{-2x^3-3x^2+6x^3}{x^6}=\frac{4x^3-3x^2}{x^6}=\frac{4x-3}{x^4}$$

$$y'(-1)=\frac{4\cdot(-1)-3}{(-1)^4}=\underline{\underline{-7}}$$