MATM – MATEMATIKA

ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC - ŘEŠENÍ ÚLOH

Mgr. Radka SMÝKALOVÁ, Ph.D.

radka.smykalova@mendelu.cz

Úlohy 1.
Vypočítejte alespoň jeden kořen algebraické rovnice s chybou menší než 0,05.
1. $x^3 + 2x^2 - 2 = 0$

Řešení.

- Ohraničení kořenů
  Všechny kořeny normované algebraické rovnice leží v intervalu $x_i \in (-(1+A), 1+A)$, kde $A = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$. (Všechny koeficienty algebraické rovnice dáme do absolutní hodnoty, čímž obdržíme kladná čísla. Největší z nich je pak číslo A.) Tedy

$$A = \max\{|1|, |2|, |0|, |-2|\} = \max\{1, 2, 0, 2\} = 2$$

$$\underline{\underline{x_i \in (-3, 3)}}$$

- Určení počtu kladných kořenů
  Napíšeme si posloupnost čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ (koeficienty rovnice v daném pořadí). Kolikrát se v pořadí čísel změní **znaménko** čísel, tolik má rovnice **kladných** kořenů, nebo o sudý počet méně. Tedy

$$1, 2, 0, -2 \text{ (nula se nepočítá ani za kladné ani za záporné číslo, jakoby tam nebyla)} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\text{má jeden kladný kořen}}}$$

- Určení počtu záporných kořenů
  Z polynomu $P(-x)$ si napíšeme posloupnost čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ (koeficienty polynomu $P(-x)$ v daném pořadí, kde $P(x) = 0$ je algebraická rovnice). Kolikrát se v pořadí čísel změní **znaménko** čísel, tolik má rovnice **záporných** kořenů, nebo o sudý počet méně. Tedy

$$P(-x) = (-x)^3 + 2(-x)^2 - 2 = -x^3 + 2x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad -1, 2, 0, -2 \text{ (nula se opět nepočítá, jakoby tam nebyla)} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\text{má dva nebo nula záporných kořenů}}}$$

- Nalezení intervalů, kde leží jednotlivé kořeny
  Algebraická rovnice $P_n(x) = 0$:

$$x^3 + 2x^2 - 2 = 0$$

  Funkce $y = P_n(x)$:

$$y = x^3 + 2x^2 - 2$$

  Průsečíky funkce $y = x^3 + 2x^2 - 2$ s osou $x \Rightarrow y = 0$. Což je algebraická rovnice $0 = x^3 + 2x^2 - 2$.
  Průsečíky funkce $y = x^3 + 2x^2 - 2$ **s osou** x jsou tedy **kořeny** algebraické rovnice $x^3 + 2x^2 - 2 = 0$!!!

Z průběhu funkce víme, že v průsečících funkce s osou x může měnit funkce znaménko (změna nad/pod osou nebo naopak).
Interval, kde leží všechny kořeny $x_i \in (-3, 3)$, si rozdělíme na několik menších intervalů a vypočítáme funkční hodnoty v krajních bodech těchto menších intervalů. Když se změní znaménko v krajních bodech intervalu, **musí** v daném intervalu ležet kořen!!!

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
znaménko funkční hodnoty funkce $y = x^3 + 2x^2 - 2$ v čísle x	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

Jeden kladný kořen leží v intervalu $x \in (0, 1)$.

- Aproximace (přiblížení) kořenů - nalezení kořenů, ale ne přesně.
  Použijeme metodu *půlení intervalu.*

Kořen x, který hledáme, leží v prvním kroku v intervalu $x \in (0, 1)$. V dalších krocích to bude interval $x \in (a, b)$.

a	$x = \frac{a+b}{2}$	b	znaménko funkční hodnoty v čísle a	znaménko funkční hodnoty v čísle x	znaménko funkční hodnoty v čísle b	chyba $= \frac{b-a}{2}$
0	$0,5$	1	$-$	$-$	$+$	$0,5$
$0,5$	$0,75$	1	$-$	$-$	$+$	$0,25$
$0,75$	$0,875$	1	$-$	$+$	$+$	$0,125$
$0,75$	$0,8125$	$0,875$	$-$	$-$	$+$	$0,0625$
$0,8125$	$0,84375$	$0,875$				$0,03125$

V posledním řádku tabulky již není potřeba počítat znaménka funkčních hodnot v číslech a, x, b, protože chyba je již menší než $0,05$, což bylo součástí zadání příkladu. Zjistili jsme tedy kořen $x = 0,84375$ s chybou $0,03125$.

2. $x^3 - 3x^2 + 3x + 3 = 0$

Řešení.

- Ohraničení kořenů
  Všechny kořeny normované algebraické rovnice leží v intervalu $x_i \in (-(1+A), 1+A)$, kde $A = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$. (Všechny koeficienty algebraické rovnice dáme do absolutní hodnoty, čímž obdržíme kladná čísla. Největší z nich je pak číslo A.) Tedy

$$A = \max\{|1|, |-3|, |3|, |3|\} = \max\{1, 3, 3, 3\} = 3$$

$$\underline{\underline{x_i \in (-4, 4)}}$$

- Určení počtu kladných kořenů
  Napíšeme si posloupnost čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ (koeficienty rovnice v daném pořadí). Kolikrát se v pořadí čísel změní **znaménko** čísel, tolik má rovnice **kladných** kořenů, nebo o sudý počet méně. Tedy

$$1, -3, 3, 3 \Rightarrow \underline{\underline{\text{má dva nebo nula kladných kořenů}}}$$

- Určení počtu záporných kořenů
  Z polynomu $P(-x)$ si napíšeme posloupnost čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ (koeficienty polynomu $P(-x)$ v daném pořadí, kde $P(x) = 0$ je algebraická rovnice). Kolikrát se v pořadí čísel změní **znaménko** čísel, tolik má rovnice **záporných** kořenů, nebo o sudý počet méně. Tedy

$$P(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 3(-x) + 3 = -x^3 - 3x^2 - 3x + 3 \quad \Rightarrow \quad -1, -3, -3, 3 \Rightarrow \underline{\underline{\text{má jeden záporný kořen}}}$$

- Nalezení intervalů, kde leží jednotlivé kořeny
  Algebraická rovnice $P_n(x) = 0$:

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 3 = 0$$

  Funkce $y = P_n(x)$:

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$$

  Průsečíky funkce $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$ s osou $x \Rightarrow y = 0$. Což je algebraická rovnice $0 = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$.
  Průsečíky funkce $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$ **s osou** x jsou tedy **kořeny** algebraické rovnice $x^3 - 3x^2 + 3x + 3 = 0$!!!

  Z průběhu funkce víme, že v průsečících funkce s osou x může měnit funkce znaménko (změna nad/pod osou nebo naopak).
  Interval, kde leží všechny kořeny $x_i \in (-4, 4)$, si rozdělíme na několik menších intervalů a vypočítáme funkční hodnoty v krajních bodech těchto menších

intervalů. Když se změní znaménko v krajních bodech intervalu, **musí** v daném intervalu ležet kořen!!!

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
znaménko funkční hodnoty funkce $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$ v čísle x	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Jeden záporný kořen leží v intervalu $x \in (-1, 0)$.

- Aproximace (přiblížení) kořenů - nalezení kořenů, ale ne přesně.
  Použijeme metodu *půlení intervalu.*

Kořen x, který hledáme, leží v prvním kroku v intervalu $x \in (-1, 0)$. V dalších krocích to bude interval $x \in (a, b)$.

a	$x = \frac{a+b}{2}$	b	znaménko fun. hodnoty v čísle a	znaménko fun. hodnoty v čísle x	znaménko fun. hodnoty v čísle b	chyba $= \frac{b-a}{2}$
-1	$-0,5$	0	$-$	$+$	$+$	$0,5$
-1	$-0,75$	$-0,5$	$-$	$-$	$+$	$0,25$
$-0,75$	$-0,625$	$-0,5$	$-$	$-$	$+$	$0,125$
$-0,625$	$-0,5625$	$-0,5$	$-$	$+$	$+$	$0,0625$
$-0,625$	$-0,59375$	$-0,5625$				$0,03125$

V posledním řádku tabulky již není potřeba počítat znaménka funkčních hodnot v číslech a, x, b, protože chyba je již menší než $0,05$, což bylo součástí zadání příkladu. Zjistili jsme tedy kořen $x = -0,59375$ s chybou $0,03125$.