MATM – MATEMATIKA

ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

Mgr. Radka SMÝKALOVÁ, Ph.D.

radka.smykalova@mendelu.cz

Algebraické rovnice

DEFINICE (Algebraická rovnice). Rovnice

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0$, se nazývá *algebraická rovnice stupně* $n \in \mathbb{N}$. (Je to **polynom** $= 0$.)

Řešením (kořenem) algebraické rovnice $P_n(x) = 0$ je každé číslo c, které je kořenem polynomu $P_n(x)$.

S pojmem *kořen polynomu* jsme se již setkali u funkcí. „Hezké kořeny“, máme na mysli **celočíselné**, již umíme najít pomocí HORNEROVA SCHÉMATU.

Ukážeme si, jak najít další kořeny - „nehezké kořeny“ a to numerickou metodou *půlení intervalu*.

Numerické řešení algebraické rovnice

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

- Ohraničení kořenů

  Všechny kořeny normované ($a_0 = 1$) algebraické rovnice leží v intervalu

  $$x_i \in (-(1+A), 1+A)\,,$$

  kde $A = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$.
  (Všechny koeficienty algebraické rovnice dáme do absolutní hodnoty, čímž obdržíme kladná čísla. Největší z nich je pak číslo A.)

- Určení počtu kladných kořenů

  Napíšeme si posloupnost čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ (koeficienty rovnice v daném pořadí). Kolikrát se v pořadí čísel změní **znaménko** čísel, tolik má rovnice **kladných** kořenů, nebo o sudý počet méně.

- Určení počtu záporných kořenů

  Z polynomu $P(-x)$ si napíšeme posloupnost čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ (koeficienty polynomu $P(-x)$ v daném pořadí, kde $P(x) = 0$ je algebraická rovnice). Kolikrát se v pořadí čísel změní **znaménko** čísel, tolik má rovnice **záporných** kořenů, nebo o sudý počet méně.

- Nalezení intervalů, kde leží jednotlivé kořeny

  Algebraická rovnice $P_n(x) = 0$:

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

  Funkce $y = P_n(x)$:

$$y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

  Průsečíky funkce $y = P_n(x)$ s osou $x \Rightarrow y = 0$. Což je algebraická rovnice $0 = P_n(x)$.

  Průsečíky funkce $y = P_n(x)$ **s osou** x jsou tedy **kořeny** algebraické rovnice $P_n(x) = 0$!!!

Z průběhu funkce víme, že v průsečících funkce s osou x může měnit funkce znaménko (změna nad/pod osou nebo naopak).
Interval, kde leží všechny kořeny $x_i \in (-(1+A), 1+A)$, si rozdělíme na několik menších intervalů a vypočítáme funkční hodnoty v krajních bodech těchto menších intervalů. Když se změní znaménko v krajních bodech intervalu, **musí** v daném intervalu ležet kořen!!!

- Aproximace (přiblížení) kořenů - nalezení kořenů, ale ne přesně.
  Použijeme metodu *půlení intervalu*.

Úlohy 1.

Vypočítejte alespoň jeden kořen algebraické rovnice s chybou menší než $0,05$.

1. $x^3 + 2x^2 - 2 = 0$ **2.** $x^3 - 3x^2 + 3x + 3 = 0$